

# Б.1.13. Математика

38.03.02 Менеджмент

Маркетинг,

Менеджмент недвижимости,

Производственный менеджмент

38.03.01 Экономика

Бухгалтерский учет анализ и аудит,

Экономика предприятий и организаций

Демонстрационный материал  
(учебно-наглядное пособие)

# Введение

Математика — фундаментальная наука, предоставляющая (общие) языковые средства другим наукам; тем самым она выявляет их структурную взаимосвязь и способствует нахождению самых общих законов природы.

# Элементы теории матриц

• Таблица чисел вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

Сумма (разность) двух матриц и одинакового размера определяется следующим образом:

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

Для умножения матрицы на число нужно каждый элемент матрицы умножить на это число

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы  $A$  из  $m$  строк и  $k$  столбцов на матрицу  $B$  из  $k$  строк и  $n$  столбцов называется матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

В частности,  $A \cdot B \neq B \cdot A$

## Правило Крамера и определители матриц 2-го и 3-го порядков

Рассмотрим матрицу второго порядка:  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

Число  $\Delta(A) = a_1b_2 - a_2b_1$  называется определителем матрицы  $A$  и обозначается следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta(A) = a_1b_2 - a_2b_1$$

Определитель третьего порядка обозначается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляется по формуле

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**Решение системы** трех уравнений с тремя неизвестными

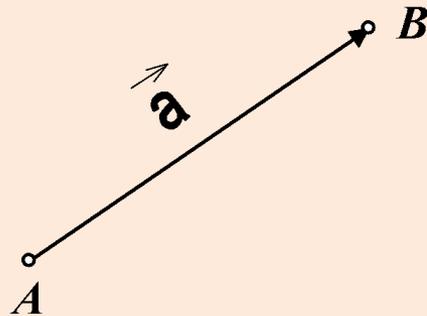
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

выражается через определители третьего порядка по формулам Крамера:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_1 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

# Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

Вектор – это направленный отрезок. Обозначается вектор символом  $\vec{a}$  или  $\overrightarrow{AB}$ , где точка  $A$  – начало, а  $B$  – конец.



Длиной или модулем вектора называется расстояние между его началом и концом и обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\vec{a}|$ .

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой. Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

## Линейные операции над векторами

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $k$  называется вектор  $\vec{b} = k\vec{a}$ , который:

▪ имеет длину  $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

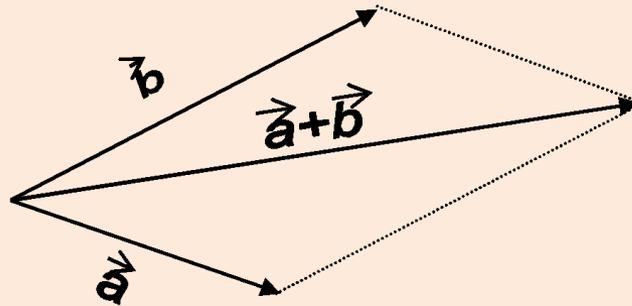
▪ коллинеарен вектору  $\vec{a}$

▪ если  $k > 0$ , то  $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$

▪ если  $k < 0$ , то  $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$

▪ если  $k = 0$ , то  $\vec{b} = \vec{0}$ .

Суммой двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , получаемый по правилу параллелограмма:



Теорема. Любой вектор на плоскости единственным образом представим в виде линейной комбинации двух данных неколлинеарных векторов и этой плоскости.

Теорема. Любой вектор в пространстве единственным образом представим в виде линейной комбинации трех данных некопланарных векторов.

Базисом  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  называются взятые в определенном порядке линейно независимые векторы.

Если базисные векторы взаимно перпендикулярны, то базис называется ортогональным, а если плюс к этому базисные векторы имеют единичную длину, то – ортонормированным.

Выражение данного вектора  $\vec{a}$  в виде линейной комбинации базисных векторов называется его разложением в данном базисе (или по базису)

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Коэффициенты разложения называются координатами вектора в данном базисе.

Декартовой прямоугольной системой координат называется совокупность фиксированной точки  $O$  (начала координат) и базиса векторов  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , исходящих из точки  $O$ .

Оси, проходящие через базисные векторы, называют соответственно

- ✓ осью абсцисс (ось  $Ox$ ),
- ✓ осью ординат (ось  $Oy$ ),
- ✓ осью аппликат (ось  $Oz$ ).

Радиус-вектором произвольной точки  $M$  называют вектор  $\overline{OM}$ , а его координаты называют координатами этой точки.

Для произвольной точки  $M$  в декартовой системе координат с ортонормированным базисом в разложении вектора

$$\overline{OM} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

его координаты являются проекциями вектора  $\overline{OM}$  на оси.

Длина вектора может быть найдена по формуле

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

## Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны (ортогональны)

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Скалярное произведение в прямоугольных координатах:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

С помощью скалярного произведения можно вычислить угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

В частности, условие ортогональности двух векторов выражается через их координаты следующим образом

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

## Прямая линия на плоскости

**Общее уравнение прямой** – уравнение прямой  $L$ ,

проходящей через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$

перпендикулярно заданному вектору  $\vec{N} = \{A, B\}$ :

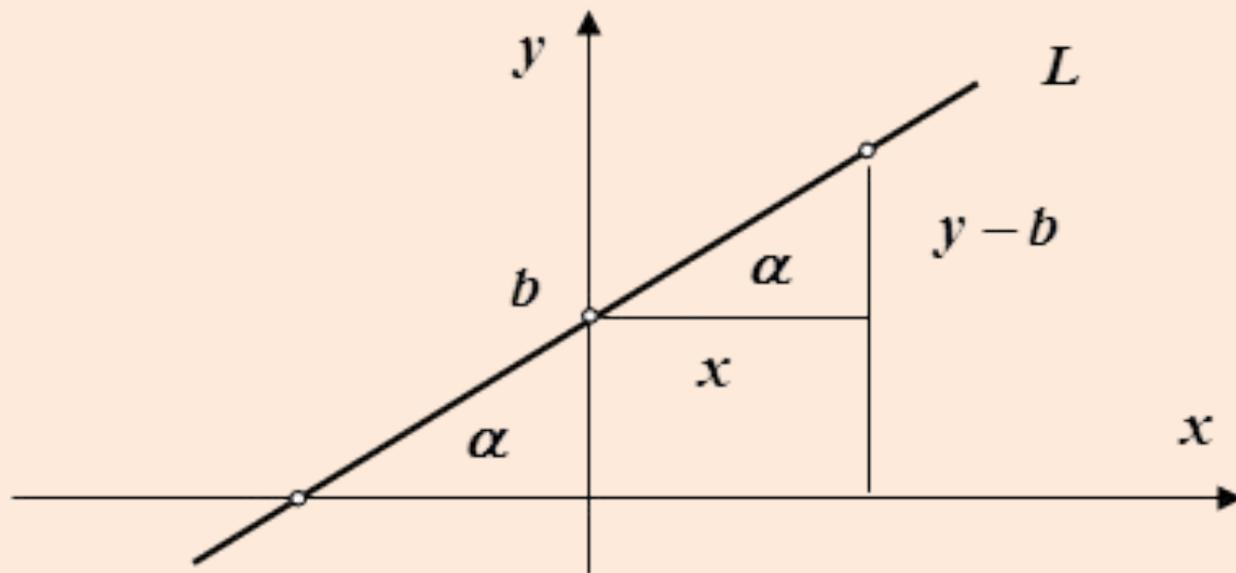
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

или

$$Ax + By + C = 0$$

## Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$



прямая  $L$  пересекает ось ординат в точке  $(0, b)$  и образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $\alpha$ , тангенс которого равен  $k$ .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Положительный **угол  $\varphi$** , который отсчитывается от прямой  $y = k_1x + b_1$  до прямой  $y = k_2x + b_2$  находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Пример 1. Составить общее уравнение прямой на плоскости, если она проходит через точку  $M(-3; 5)$  и вектор нормали к ней  $\vec{n}(2; -8)$  .

Решение. Используя формулу общего уравнения прямой, получаем:

$$2(x+3) - 8(y-5) = 0$$

$$2x + 6 - 8y + 40 = 0$$

$$x - 4y + 23 = 0$$

Пример 2. Найти угол между прямыми, заданными общими уравнениями  $x - 3y + 5 = 0$  и  $2x + 4y - 7 = 0$ .

Решение. Используя формулу, получаем:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1 \cdot 2 - 3 \cdot 4}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{4+16}} = \frac{-10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \\ &= \frac{-10}{\sqrt{200}} = \frac{-10}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{4}} = \frac{-10}{10 \cdot \sqrt{2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Получаем угол  $\varphi = -\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ .

Пример 3. Написать уравнение прямой, которая проходит через две заданные точки  $(-1, 2)$  и  $(2, 1)$ .

*Решение.*

По уравнению 
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

полагая в нем  $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = 1$  (без разницы, какую точку считать первой, какую - второй), получим

$$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x + 1}{2 + 1} \quad \text{или} \quad \frac{y - 2}{-1} = \frac{x + 1}{3}$$

после упрощений получаем окончательно искомое

уравнение в виде  $x + 3y - 5 = 0.$

# Элементы математического анализа

Пусть заданы два множества  $X$  и  $Y$  произвольной природы. Допустим, что каждому элементу  $x$  некоторого подмножества  $D \subseteq X$  поставлен в соответствие определенный элемент  $y \in Y$ . Это соответствие (отображение) называют функцией  $y$  от  $x$  и обозначают  $y = f(x)$ .

Множество  $D$  называется областью определения функции, а множество всех элементов  $y$ , которые соответствуют элементам множества  $D$ , называется областью значений этой функции.

Предел функции — одно из основных понятий математического анализа. Функция  $f(x)$  имеет предел  $A$  в точке  $x_0$  если для всех значений  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , значение  $f(x)$  близко к  $A$ .

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## Таблица чисел вида

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

состоящая из строк и столбцов, называется матрицей размера (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

# Дифференцирование

**Производная (функции в точке)** — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке).

Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется дифференцированием. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

## Вычисление производных

*Правила дифференцирования:*

**Производная суммы** конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

**Производная произведения** двух дифференцируемых функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой функции

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

**Постоянный множитель** при дифференцировании выносится за знак производной

$$(cf'(x))' = cf''(x)$$

**Производная частного** вычисляется по следующей формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

## Таблица основных производных

1.  $c' = 0, c = \text{const}$

2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4.  $(e^x)' = e^x$

5.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7.  $(\sin x)' = \cos x$

8.  $(\cos x)' = -\sin x$

9.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16.  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

17.  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

18.  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

19.  $(\operatorname{th} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

**Производная сложной функции** по независимой переменной равна произведению производной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой переменной:

$$y'_x = f'_u(u(x))u'(x)$$

### Пример

Найти производную функции

$$s = (\sin x - 2 \cos x)^3$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} s' &= \left( (\sin x - 2 \cos x)^3 \right)' = &= \\ &= 3(\sin x - 2 \cos x)^2 \bullet (\sin x - 2 \cos x)'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin x - 2 \cos x)' &= (\sin x)' - (2 \cos x)' = \\ &= \cos x - 2(\cos x)' = \cos x - 2(-\sin x) = \\ &= \cos x + 2 \sin x. \end{aligned}$$

## Таблица чисел вида

$$(a_{ij})$$

$$f'(x_0) = 0$$

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

Пример. Найти экстремумы функции

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Функция определена на всей числовой прямой. Её

производная  $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$

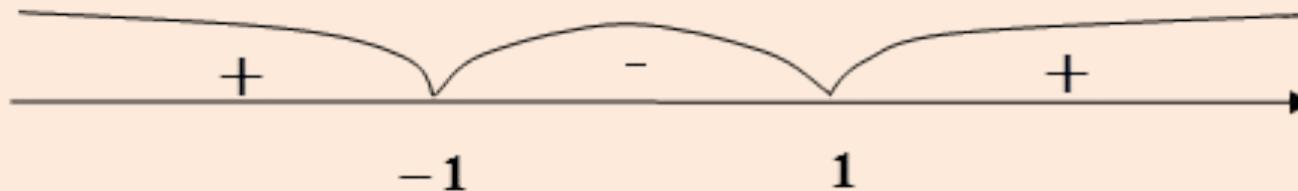
всюду существует, поэтому абсциссы точек

подозрительных на экстремум это те значения

переменной, при которых производная равна нулю, т. е.

$x = -1$  и  $x = 1$ . Отметим на следующей схеме знаки

производной в соответствующих интервалах



Отсюда видно, что в интервале  $(-\infty, -1)$  функция возрастает, а в интервале  $(-1, 1)$  – убывает, значит, при

$x = -1$  функция имеет максимум  $y_{\max} = f(-1) = 3$ .

Соответственно,  $y_{\min} = f(1) = -1$ .

# Интегрирование

Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на интервале  $X=(a, b)$  (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала  $f(x)$  является производной для  $F(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$

Множество первообразных функции  $f(x)$  называется **неопределённым интегралом** от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Правила интегрирования

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx \quad (k = \text{const})$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

## Таблица интегралов

$$1. \int 0 \cdot dx = C$$

$$2. \int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$3. \int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \\ n \neq -1, x > 0$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

13. «Высокий» логарифм:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$$

14. «Длинный» логарифм:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Пример. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

*Решение.* Согласно тождеству  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

# Интегрирование методами подстановки и замены переменной.

## Формула подстановки

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

Пример. Вычислить  $\int \cos(3x + 2)dx$

*Решение.* Делая в этой формуле подстановку  $u = 3x + 2$ , получим

$$\int \cos(3x + 2)d(3x + 2) = \sin(3x + 2) + C$$

откуда найдем

$$\int \cos(3x + 2)dx = \frac{1}{3}\sin(3x + 2) + C$$

Таблица чисел вида

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$t = \psi(x)$$

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется

матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а

число  $n$  называют её порядком. Более компактная

форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

$$\int \frac{dx}{2-3x} = \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |2-3x| + C$$

## Формула интегрирования по частям

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

Пример. Вычислить  $\int x \cdot e^{-x} dx$

*Решение.* Введем обозначения:  $u(x) = x$ ,  $dv(x) = e^{-x} dx$

Тогда  $du(x) = dx$ ,  $v(x) = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x}$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x \cdot e^{-x} dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$$

**Определённым интегралом** функции на промежутке называется конечный предел интегральных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(p_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx, \quad (\lambda = \max_k \Delta x_k \rightarrow 0)$$

если он существует и не зависит ни от способа разбиения промежутка  $[a, b]$ , ни от выбора точек  $p_k$ .

Ценность этого математического понятия состоит в том, что функцию можно «наполнять» разным содержанием: это может быть функция, определяющая границу криволинейной трапеции, и тогда определенный интеграл выражает площадь трапеции, или это может быть функция, определяющая линейную плотность неоднородного стержня, и тогда определенный интеграл выражает массу стержня.

Формула Ньютона – Лейбница вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

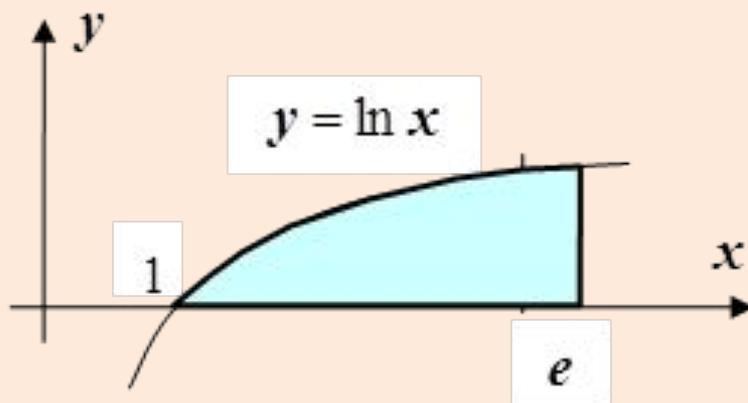
Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$y = \ln x$  осью абсцисс и прямой  $x = e$ . Искомая

площадь (см. рис.) выражается интегралом  $S = \int_1^e \ln x dx$



Интегрируем по частям  $u = \ln x$ ,  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $dv = dx$ ,  $v = x$

$$S = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

**Правило замены переменной** в определённом интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

Заменим  $x = \varphi(t)$ , причём концам промежутка  $[\alpha, \beta]$  соответствуют концы промежутка  $[a, b]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  или  $\varphi(\alpha) = b$ ,  $\varphi(\beta) = a$ .

При этих условиях имеют место формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Пример. Вычислить определенный интеграл  $I = \int_4^5 x\sqrt{x^2 - 16} dx$ .

*Решение.* Произведём замену переменной, полагая

$t = x^2 - 16$ . Тогда  $dt = 2x dx$ , откуда  $x dx = (1/2) dt$ , и

подынтегральное выражение преобразуется так:

$$x\sqrt{x^2 - 16} dx = \sqrt{x^2 - 16} \cdot x dx = (1/2)\sqrt{t} dt.$$

Найдём новые пределы интегрирования. Подстановка

значений  $x = 4$  и  $x = 5$  в уравнение  $t = x^2 - 16$  дает

$\alpha = 4^2 - 16 = 0$ ,  $\beta = 5^2 - 16 = 9$ . Используя теперь формулу,

получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^9 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_0^9 t^{1/2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^9 = \frac{1}{2} t \sqrt{t} \Big|_0^9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \sqrt{9} = 9. \end{aligned}$$

# Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Решением уравнения назовем любую функцию, обращающую это уравнение в тождество. Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

## Уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

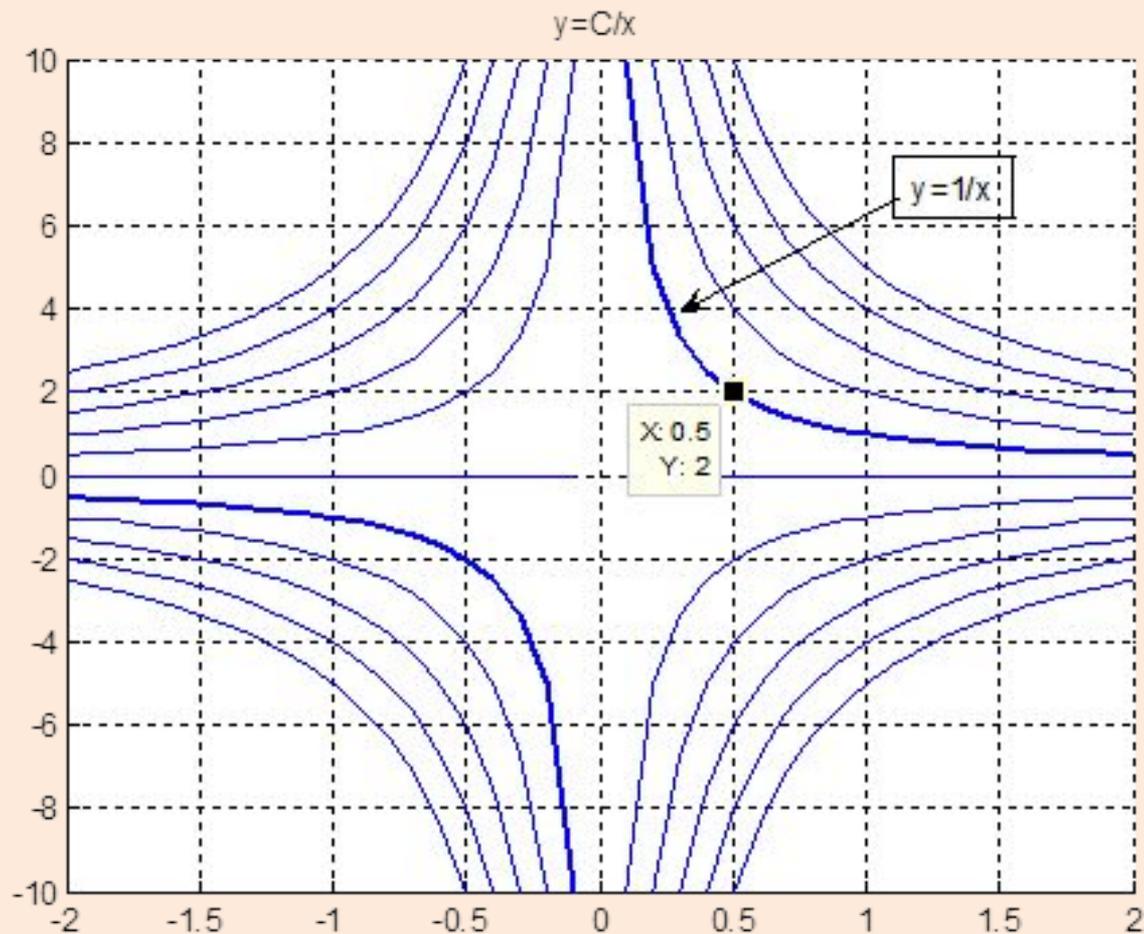
Пример. Пусть имеется уравнение  $y' = -\frac{y}{x}$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что функции

$$y = \frac{C}{x} \quad (*)$$

обращают это уравнение в тождество.

Построим графики этих функций при различных значениях  $C$  в плоскости переменных  $x$ ,  $y$ .



Формула (\*) определяет общее решение уравнения, представляющее собой семейство кривых.

Выберем точку с координатами (на рис. это точка (0.5, 2)). Через нее проходит кривая из семейства (\*), которой соответствует значение  $C = x_0 y_0$ . Соответствующее решение

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

называют частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям

$$y(x_0) = y_0$$

Для произвольного дифференциального уравнения первого порядка общее решение имеет вид функции

$$y = \varphi(x, C)$$

содержащей параметр  $C$ . Графики функций этого семейства называют интегральными кривыми.

Задачей Коши называют нахождение частного решения, удовлетворяющего данным начальным условиям  $(x_0, y_0)$ .

## Уравнения с разделяющимися переменными

Если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

правая часть может быть представлена в виде произведения функций

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

то такое уравнение называют уравнением с **разделяющимися переменными**.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' = y$$

Решение. Так как  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то  $x \cdot \frac{dy}{dx} = y$ .

Далее разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Ответ. Общее решение  $y = Cx$ , где  $C$  – константа.

## Таблица чисел вида

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

## Таблица чисел вида

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

линейные однородные дифференциальные уравнения  
второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (**)$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (**)$$

- ✓ Если уравнение (\*) имеет **два различных действительных корня**  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то общее решение уравнения (\*\*) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- ✓ Если характеристическое уравнение (\*) имеет **два одинаковых действительных корня**  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$ , то общее решение уравнения (\*\*) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x)$$

- ✓ Если уравнение (\*) имеет **комплексные корни**  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  то общее решение уравнения (\*\*) имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Пример 1. Решить уравнение  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .

*Решение.* Данное уравнение является линейным однородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Выпишем и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = -1; -2$$

Так как оба корня вещественные и различные, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

## Таблица чисел вида

состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется матрицей размера  $m \times n$  (читается « $m$ » на « $n$ »).

Если  $n = m$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  называют её порядком. Более компактная форма записи матрицы имеет вид  $A = (a_{ij})$ .

Пример 3. Решить уравнение  $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

Получены сопряженные комплексные корни.

Ответ: Общее решение:

$$y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x), \text{ где } C_1, C_2 - \text{const}$$