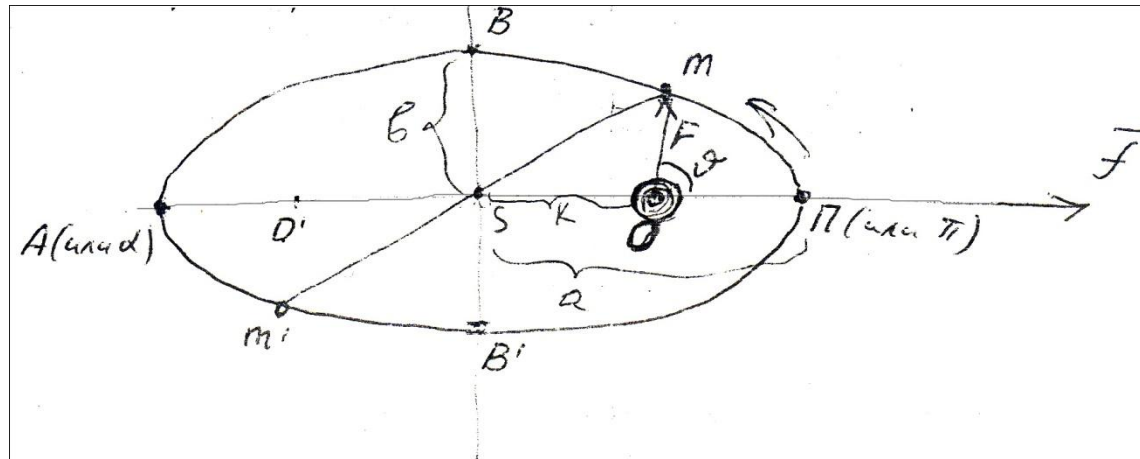


# ЛЕКЦИЯ 7

## 8. Эллиптическое движение.

$$0 < e < 1 \text{ и } \theta_0 \neq 0$$



$AS = a$  – большая полуось

$SB = b$  – малая полуось, перпендикулярна большой полуоси

$SO = k$  – фокальное расстояние

1)  $e=0$  – круговая орбита;

2) при  $e \rightarrow 1$

$$\frac{r_a}{r_n} = \frac{1+e}{1-e} \rightarrow \infty \text{ гся параболой.}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} \quad (31)$$

при  $\vartheta = 0$

$$r = r_{\Pi} = r_{min} = \frac{p}{1 + e} \quad V = V_{\Pi} = V_{max} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e)$$

при  $\vartheta = 180^\circ$

$$r = r_A = r_{max} = \frac{p}{1 - e} \quad V = V_A = V_{min} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e)$$

Форма и размер орбиты определяются параметрами  $p$  и  $e$ .

Можно и любыми другими двумя  $r_n, r_A, c, f, H, a, b, k$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad k^2 = a^2 - b^2; \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad p = a(1 - e^2);$$

$$a = \frac{r_{\Pi} + r_A}{2}; \quad e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{2a}; \quad e = \frac{k}{a}; \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$\lim_{e \rightarrow 1} \frac{r_A}{r_{\Pi}} = \lim_{e \rightarrow 1} \frac{1+e}{1-e} = \infty$$

**Составим теперь выражения, специфичные для эллиптической орбиты.**

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e \sin \vartheta \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot (1 + e \cos \vartheta) \quad V^2 = V_r^2 + V_n^2$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{\mu}{p} [e^2 \sin^2 \vartheta + (1 + e \cos \vartheta)^2] = \\ &= \frac{\mu}{p} [e^2 \sin^2 \vartheta + 1 + 2e \cos \vartheta + e^2 \cos^2 \vartheta] = \\ &= \frac{\mu}{p} [e^2 (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) + 1 + 2e \cos \vartheta] = \\ &= \frac{\mu}{p} [e^2 + 1 + 2e \cos \vartheta] = \\ &= \frac{2\mu}{p} [1 + e \cos \vartheta] + \frac{\mu}{p} [e^2 - 1] \end{aligned}$$

так как  $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$        $a = \frac{p}{1 - e^2}$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_r}{V_n} = \frac{e \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}$$

С учетом (31)  $1 + e \cos \vartheta = \frac{p}{r}$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{p} e \sin \vartheta \quad (*)$$

**качественный анализ движения:**

- *скорость полета убывает при удалении КЛА от притягивающего центра (при изменении  $\vartheta$  от 0 до  $\pi$ ) до минимума, а затем возрастает с уменьшением  $r$ .*

$$V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e) \quad V_{\text{а}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e)$$

С учетом  $p = a(1 - e^2)$ ;

$$V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{\mu(1 + e)^2}{a(1 - e^2)}} = \sqrt{\frac{\mu(1 + e)}{a(1 - e)}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{\mu}{a}}$$

$$V_{\text{а}} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e)^2}{a(1 - e^2)}} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e)}{a(1 + e)}} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{\mu}{a}}$$

Полагая, что  $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$  — круговая скорость, соответствующая радиусу  $r = a$

$$V_{\text{п}} = V_{\text{кр}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad V_{\text{а}} = V_{\text{кр}} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$$

Введя обозначения

$$W_{\Pi} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\Pi}}}; \quad W_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_A}}$$

- *круговые скорости в перигее и апогее орбиты, соответственно*

$$r_a = a(1 + e) \quad r_{\Pi} = a(1 - e)$$

$$V_{\Pi} = W_{\Pi} \sqrt{1 + e} \quad V_a = W_a \sqrt{1 - e}$$

Перепишем выражение для квадрата скорости

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$V^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{r} + \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = W^2 + \mu \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$w = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$  — *круговая скорость в рассматриваемой (любой конкретной) точке орбиты с радиус-вектором r*

Имеем  $V^2 = W^2 + \Delta V^2$

- на участке В'ПВ орбиты  $r < a$ , то можно отметить, что  $V > W$ .
- на участке В'АВ имеем  $r > a$  и, следовательно,  $V < W$ , так как в (\*\*)

$$V^2 = W^2 - \Delta V^2$$

**Таким образом, малая полуось ВВ' делит эллиптическую орбиту на две равные части:**

- **первая** - ВП В' - расположена близко к перицентру и характеризуется неравенствами:  $r < a$ ,  $V > W$ .
- **вторая** - ВА В' – расположена ближе к апоцентру и характеризуется неравенствами:  $r > a$ ,  $V < W$ .

Наклон вектора скорости к горизонту

$$\theta_{\text{л}} = \theta_{\text{А}} = 0$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{e \sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{d(\vartheta)} &= \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{e \cos \vartheta (1 + e \cos \vartheta) - e \sin \vartheta (-e \sin \vartheta)}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \\ &= \frac{e \cos \vartheta + e^2 \cos^2 \vartheta + e^2 \sin^2 \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{\cos \vartheta + e}{(1 + e \cos \vartheta)^2} \cdot e \end{aligned}$$

$$\frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{d\vartheta} = \frac{\cos \vartheta + e}{(1 + e \cos \vartheta)^2} e = 0,$$

или

$$\cos \vartheta = -e$$

отсюда

$$\max \theta = \arcsin e; \quad \min \theta = -\arcsin e$$



Определим все через время

$$p^2 \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = c \cdot (t - \tau) \quad c^2 = p\mu$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (1 - \tau)$$

$$t = t(\vartheta)$$

от истинной аномалии перейдём к так называемой  
эксцентрической аномалии E



$$r \cos \vartheta = Ok = a \cos E - OS$$

$$OS = a - r_{\Pi} = a - \frac{p}{1+e} = a - \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a - a(1-e) = ae$$

$$r \cos \vartheta = a \cos E - ae = a(\cos E - e)$$

$$r \sin \vartheta = mk = \frac{b}{a} m' k = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$

$$r = a \cdot (1 - e \cos E) \quad (3)$$

уравнением орбиты, записанное через E

$$r(1 + \cos \vartheta) = a(1 - e)(1 + \cos E);$$

$$r(1 - \cos \vartheta) = a(1 + e)(1 - \cos E);$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}; \quad (4)$$

**Соотношение (4) и есть связь между аномалиями E и  $\vartheta$**

**найдем связь  $E$  и  $t$**

$$1 + e \cos \vartheta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E}, \quad (5)$$

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} dE \quad (6)$$

$$p = a \cdot (1 - e^2)$$

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau)$$

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (7)$$

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = n(t - \tau) = M \quad nT = 360^\circ \quad \text{или } n = 360^\circ / T$$

$$E - e \sin E = M \quad (8)$$

- Действительно,  $M$  возрастает пропорционально времени и равно нулю при  $t=\tau$ , то есть когда КЛА находится в перицентре ( $\vartheta=E=0$ ).
- При  $t=\tau+1/2T$  (в апоцентре)  $M=180^\circ$  ( $\vartheta=E=M$ ).
- В конце полного оборота  $M=360^\circ$  ( $\vartheta=E=M$ ).

**Прямая задача: определить время  $t$ , соответствующее любой заданной точке орбиты (характеризуемой углами  $E$  и  $\vartheta$ ).**

**Замечание:** при вычислении величины  $E$  по (4) следует иметь в виду, что углы  $\vartheta$  и  $E$  всегда находятся в одной четверти. Кроме того, в перицентре и апоцентре орбиты (то есть при  $\vartheta = k\pi$ , где  $k$  – целое произвольное число)  $E = \vartheta$ .

- При полёте от П к А  $0 < \vartheta < \pi \quad E < \vartheta$
- а при полёте от А к П  $\pi < \vartheta < 2\pi \quad E > \vartheta$

**Обратная задача – определение положения КЛА по заданному времени  $t$**

$$E - e \sin E = n(t - \tau) = M$$

$$E_n = M - e \sin E_{n-1}$$

**период обращения  $T$  КЛА**

$$E - e \sin E = n(t - \tau) = M$$

$$2\pi - e \sin 2\pi = nT, \quad (9)$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

$n = \frac{2\pi}{T}$  *средняя угловая скорость движения ЛА или среднее движение*

$$T = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}};$$