Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Автор: Тихомирова
Анна Николаевна

ЛЕКЦИЯ 6. МНОЖЕСТВА

Множества: определение и основные свойства

Множество (по Тьюрингу) – это объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью.

Множество (по Кантору) – это совокупность объектов безразлично какой природы, неизвестно существующих ли, рассматриваемая как единое целое.

Множества: определение и основные свойства

1. Множество, которое не имеет ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается Ø.
2. **Единичное** множество – множество, все элементы которого тождественны.
3. Множество M_1 называется **подмножеством** множества M тогда и только тогда, когда любой элемент множества M_1 принадлежит множеству M.
4. Множества называются **равными**, если они имеют одни и те же элементы.
5. Подмножество M_1 множества M называется **собственным** подмножеством множества M, если M_1 является его подмножеством, но при этом существует хотя бы один элемент, принадлежащий M, но не принадлежащий M_1.

Множества: определение и основные свойства

6. Пусть A и B – два множества. Множество M=A ∪ B такое, что его каждый элемент принадлежит A или B (а возможно и A и B), называется ***суммой*** или ***объединением*** множеств A и B.
7. Пусть A и B – два множества. Множество M=A ∩ B такое, что его каждый элемент принадлежит и A и B одновременно, называется ***пересечением*** множеств A и B.
8. Пусть A и B – два множества. Множество M=A \ B такое, что оно состоит из тех элементов множества A, которых нет во множестве B, называется ***разностью*** множеств A и B, или ***дополнением*** B до A.

Множества: определение и основные свойства

9. Пусть A и B – два множества. Множество M=A × B такое, что оно образовано из всех пар (a, b) таких, что a принадлежит A и b принадлежит B, называется ***декартовым произведением*** множеств A и B.
   Пусть A = {a,b}; B = {m,n}
   Тогда A×B = {(a,m),(a,n),(b,m),(b,n)}
10. Пусть A – множество. Множество M, элементами которого являются подмножества множества A, включая само A и пустое множество, называется множеством всех подмножеств множества A или ***булеаном*** A и обозначается P(A).
    Пусть A = {a,b,c}
    Тогда M= P(A)={Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

Множества: определение и основные свойства

9. **Отображением** f множества А в множество В называется некое правило, по которому каждому элементу множества А ставят в соответствие элемент множества В.
10. **Множество всех отображений** множества А в В обозначается как B^A (В в степени А).

Пусть А = {a,b,c}; B = {m,n}

Тогда B^A это набор функций fi приведенных в таблице

A	$f_1(A)$	$f_2(A)$	$f_3(A)$	$f_4(A)$	$f_5(A)$	$f_6(A)$	$f_7(A)$	$f_8(A)$
a	*m*	*m*	*m*	*m*	*n*	*n*	*n*	*n*
b	*m*	*m*	*n*	*n*	*m*	*m*	*n*	*n*
c	*m*	*n*	*m*	*n*	*m*	*n*	*m*	*n*

Равномощные множества и кардинальные числа

Мощность множества (по Кантору) – это та общая идея, которая остается у нас, когда мы, мысля об этом множестве, отвлекаемся как от всех свойств его элементов, так и от их порядка.

Мощность множества – это характеристика, которая объединяет данное множество с другими множествами, применение процедуры сравнения к которым дает основание предполагать, что каждый элемент одного множества имеет парный элемент из другого множества и наоборот.

Кардинальное число

Далее мощность будем называть ***кардинальным числом*** множества.

Кардинальные числа некоторых множеств

1. Мощность пустого множества равна 0: $|\varnothing|=0$.
2. Мощность множества из одного элемента равна 1: $|\{a\}|=1$.
3. Если множества равномощны ($A\sim B$), то их кардинальные числа равны: $|A|=|B|$.
4. Мощность булеана множества A равна $2^{|A|}$: $|P(A)|=2^{|A|}$
5. Мощность множества B^A всех отображений A в B равна $|B|^{|A|}$

Классификация множеств

множество

множество, состоящее из конечного числа элементов

конечное

бесконечное

множество, состоящее из бесконечного числа элементов

счетно-бесконечное

несчетное

Для обозначения мощности конечных множеств используются **натуральные числа**

бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел (его элементы можно пронумеровать натуральными числами)

бесконечное множество, не равномощное множеству натуральных чисел

Для обозначения мощности бесконечных множеств используются **трансфинитные числа**

Алеф-нуль $\aleph_0$ – первое трансфинитное число. По определению – это мощность множества всех натуральных чисел. Это наименьшая бесконечная мощность

Свойства множеств

Множество A={ 1, 2 }

Подмножества множества A:={ $\varnothing$, {1 }, { 2 }, { 1 , 2 } }

Из них собственные подмножества множества A:={ $\varnothing$, {1 }, {2 } }

Конечное множество → конечное множество не равномощно никакому своему собственному подмножеству

Бесконечное множество → бесконечное собственное подмножество бесконечного множества ***может быть*** равномощно самому множеству

парадоксы

Галилея

Гильберта

Парадокс Галилея

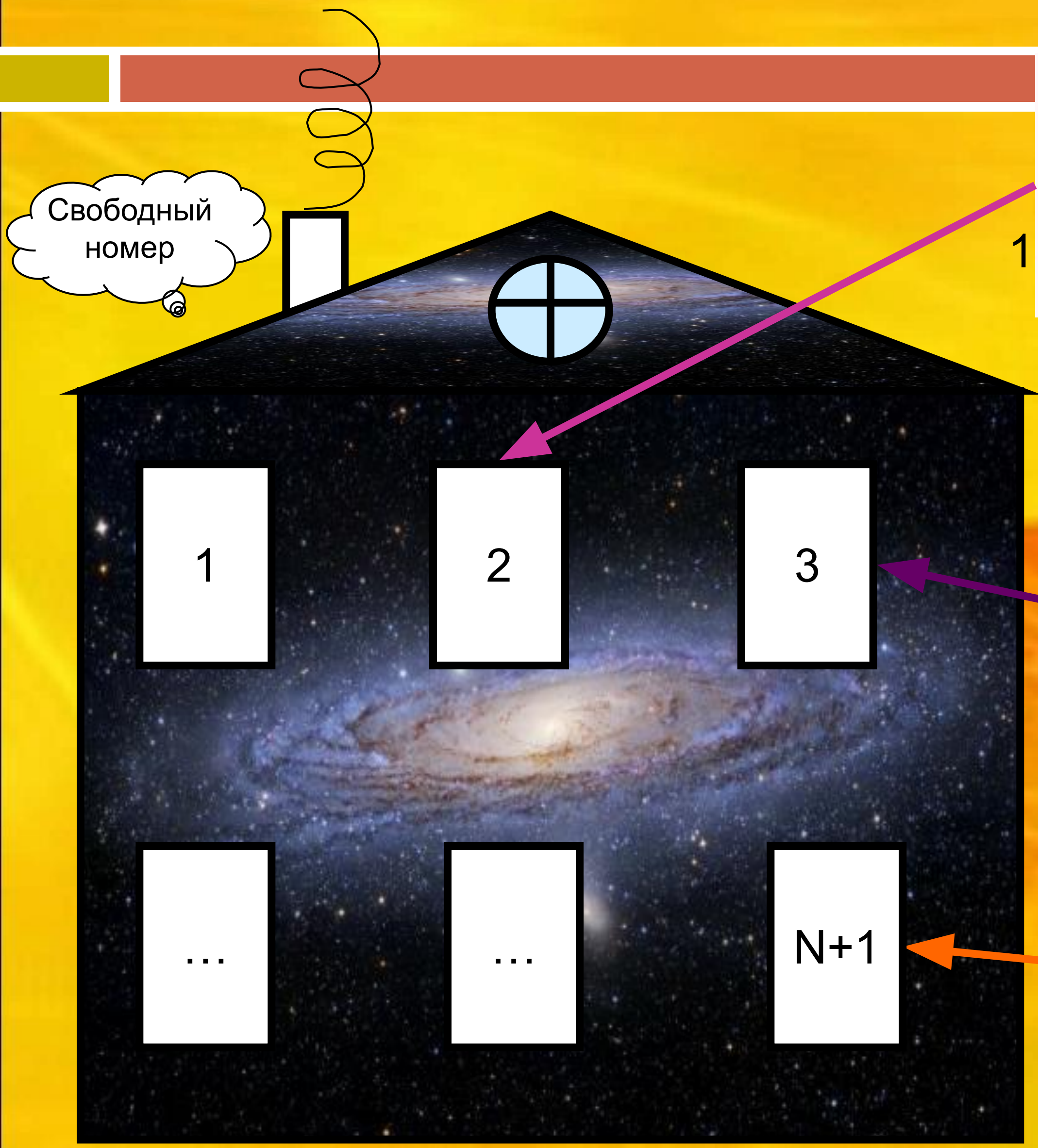
Хотя большинство натуральных чисел не является квадратами, всех натуральных чисел не больше, чем квадратов

(если сравнивать эти множества по мощности)

N_1 - собственное подмножество N: $N_1 \subset N$

при этом их мощности равны: $|N_1|=|N|$

Парадокс Гильберта



Если гостиница с бесконечным количеством номеров полностью заполнена, в неё можно поселить ещё посетителей, даже бесконечное число.

(В оригинальной версии под термином «бесконечное» имеется ввиду «счетно-бесконечное число» посетителей)