

Модуль действительного числа

Цели и задачи урока

- ▶ Ввести определение модуля действительного числа, рассмотреть свойства и разъяснить геометрический смысл модуля;
- ▶ Ввести функцию $y = |x|$, показать правила построения ее графика;
- ▶ Научить разными способами решать уравнения, содержащие модуль;
- ▶ Развивать интерес к математике, самостоятельность, логическое мышление, математическую речь, прививать аккуратность и трудолюбие.

Определение.

Модулем неотрицательного действительного числа

x называют само это число: $|x| = x$;

модулем отрицательного действительного числа x

называют противоположное число: $|x| = -x$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например:

$$|8| = 8; \quad |-8| = -(-8) = 8;$$

$$|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = 3 - \sqrt{5} \text{ (т.к. } \sqrt{5} - 3 < 0 \text{)}$$

Свойства модуля

$$1. |a| \geq 0.$$

$$2. |ab| = |a||b|.$$

$$3. \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}, \text{ где } b \neq 0.$$

$$4. |a|^2 = a^2.$$

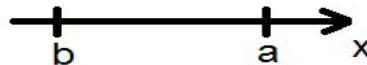
$$5. |a| = |-a|.$$

Геометрический смысл модуля

Числовая прямая служит хорошим примером множества действительных чисел. Давайте отметим на числовой прямой две точки a и b и постараемся найти расстояние $\rho(a;b)$ между этими точками. Очевидно что это расстояние равно $b-a$, если $b>a$



Если поменять местами, то есть $a>b$, расстояние будет равно $a-b$.



Если $a=b$ то расстояние равно нулю, так как получается точка. Все три случая мы можем описать единообразно:

$$\rho(a; b) = |a - b|$$

Пример. Решите уравнение:

- а) $|x-3|=6$ б) $|x+5|=3$ в) $|x|=2.8$ г)

Решение.

а) Нам нужно найти на координатной прямой такие точки, которые удалены от точки 3 на расстояние равное 6. $\rho(x; 3) = 6$

Такие точки 9 и -3. (Прибавили и отняли шестерку от тройки.)

Ответ: $x=9$ и $x=-3$

- б) $|x+5|=3$, перепишем уравнение в виде $|x-(-5)|=3$. $\rho(x; -5) = 3$

Найдем расстояние от точки -5 удаленное на 3. Такое расстояние, получается, от двух точек: $x=2$ и $x=-8$

Ответ: $x=2$ и $x=-8$.

- в) $|x|=2.8$, можно представить в виде $|x-0|=2.8$ или

Очевидно, что $x=-2.8$ или $x=2.8$ $\rho(x; 0) = 2.8$

Ответ: $x=-2.8$ и $x=2.8$.

- г) $|x - \sqrt{3}| = 2$ эквивалентно $\rho(x; \sqrt{3}) = 2$

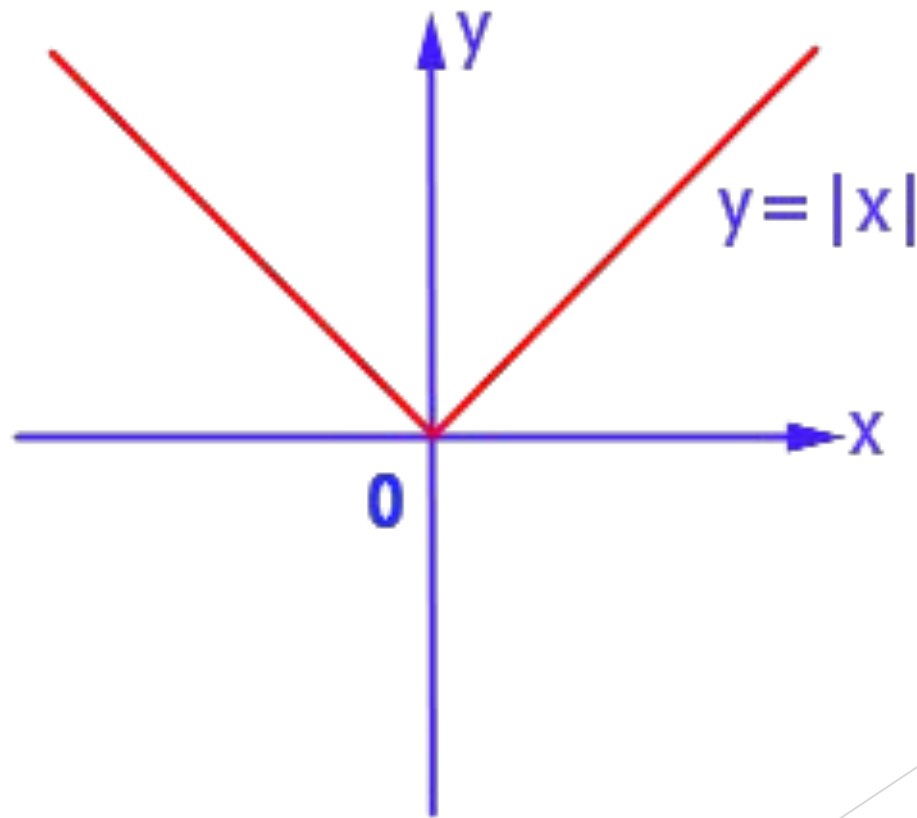
- Очевидно, что $x = \sqrt{3} - 2$ или $x = \sqrt{3} + 2$

Задание 1.

Построить график и перечислить свойства функции $y = |x|$.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Функция $y = |x|$



1. Область определения – $(-\infty; +\infty)$.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x < 0$ и $x > 0$.
3. Функция непрерывная.
4. $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.
5. Функция ограничена снизу, не ограничена сверху.
6. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$ и
возрастает на луче $[0; +\infty)$.
7. Область значений функции – луч $[0; +\infty)$.

Задание 2

Решить уравнение $|x-1| = 4$

1 способ (аналитический)

По определению модуля:

$$x - 1 = 4,$$

$$x = 5.$$

$$-(x - 1) = 4,$$

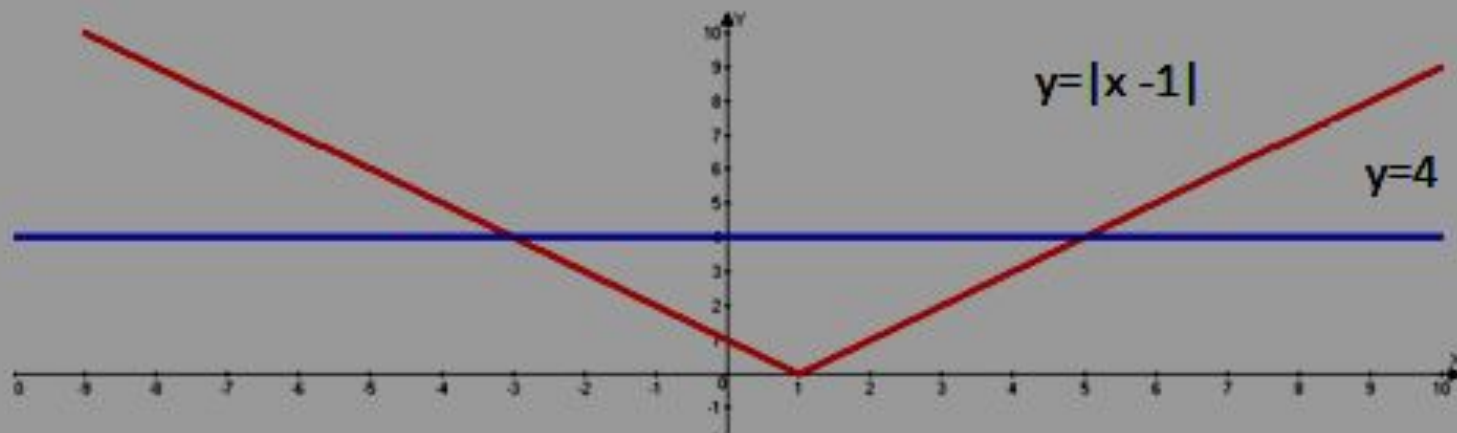
$$x - 1 = -4,$$

$$x = -3.$$

Ответ: -3; 5.

2 способ (графический)

Построим на одной координатной плоскости графики функций $y = |x - 1|$ и $y = 4$. Абсциссы точек пересечения графиков будут решениями уравнения.



Ответ: -3; 5.

3 способ

Переведем аналитическую модель $|x - 1| = 4$ на геометрический язык: нужно найти на числовой прямой такие точки, которые удалены от точки 1 на расстояние, равное 4.



$$1 + 4 = 5$$

$$1 + (-4) = -3.$$

Ответ: -3; 5.

Модуль действительного числа.

Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Рассмотрим выражение, если $a > 0$, то мы знаем что

$$\sqrt{a^2} = a$$

Но как быть, в случае если $a < 0$? Ведь не может быть

$$\sqrt{a^2} = a$$

таким случае корень равен отрицательному числу.

Давайте рассмотрим $-a$.

1. Если $a < 0$ то $-a > 0$.

2.
$$(-a)^2 = a^2$$

Давайте обобщим:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

По определению модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

То есть

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Модуль действительного числа.

Пример. Упростить выражение

$$\sqrt{(a-2)^2}$$

а) $a-2 \geq 0$ **б)** $a-2 < 0$

Решение. Справедливо тождество:

$$\sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$$

а) Если $a-2 \geq 0$, то $|a-2|=a-2$. Таким образом получаем

$$\sqrt{(a-2)^2} = a-2$$

б) Если $a-2 < 0$, то $|a-2|=-(a-2)=2-a$. Таким образом получаем

$$\sqrt{(a-2)^2} = 2-a$$

Модуль действительного числа.

Пример. Вычислить

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

Решение. Мы знаем что:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-3|$$

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = |\sqrt{5}-2|$$

Осталось раскрыть модули

Рассмотрим первое выражение:

$$\sqrt{5} - 3 < \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$\sqrt{5} - 3 < 0$$

Рассмотрим второе выражение:

$$\sqrt{5} - 2 > \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\sqrt{5} - 2 > 0$$

Используя определение раскроем знаки модулей:

$$|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$$

$$|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

В итоге получили:

$$\sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 1$$

Ответ: 1.

Закрепление нового материала.

- ▶ № 16.2, №16.3, №16.4,
№16.12, №16.16 (а, г),
№16.19

Задачи для самостоятельного решения

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение:

а) $|x-10|=3$ б) $|x+2|=1$ в) $|x|=2.8$ г) $|x - \sqrt{5}| = 1$

2. Решить уравнение:

а) $|3x-9|=33$ б) $|8-4x|=16$ в) $|x+7|=-3$

3. Упростить выражение $\sqrt{(2a-6)^2}$
если а) $a-3 \geq 0$ б) $a-3 < 0$

4. Вычислите

$$\sqrt{(\sqrt{7}-4)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$$

**Домашнее задание: прочитать материал §16,
№16.6 16.11, 16.22**