

В ы с ш а я г е о д е з и я — наука,  
занимающаяся определением формы,  
размеров и гравитационного поля Земли,  
созданием государственных опорных  
геодезических сетей, изучением  
геодинамических явлений, решением  
геодезических задач на поверхности  
земного эллипсоида и в пространстве.

Задачи высшей геодезии принято  
подразделять на научные и научно-  
технические. Главной научной задачей  
высшей геодезии и

смежных с ней наук (гравиметрии и теории фигуры Земли, космической геодезии и астрономии) является определение параметров фигуры Земли (ее формы и размеров), внешнего гравитационного поля и их изменений во времени.

Под гравитационным полем Земли понимают поле силы тяжести, являющейся равнодействующей силы притяжения (тяготения) и центробежной силы, вызванной суточным вращением Земли.

**Изучение гравитационного поля Земли** в силу особой важности для геодезии и с учетом того, что параметры фигуры и гравитационного поля Земли определяются из совместной обработки комплекса астрономо-геодезических, гравиметрических, спутниковых и других измерений и совместно используются при решении многих задач высшей геодезии, **является одной из главных научных задач геодезии.**

**Основная научно-техническая задача**  
**высшей геодезии** и смежных с ней наук  
состоит **в создании** глобальной  
(общеземной) и национальных (на  
территории государства) опорных  
**геодезических сетей высокой точности**. К  
национальным, опорным сетям относятся:  
государственная геодезическая сеть  
(основная, часто называемая плановой),  
государственная нивелирная сеть (высотная)  
и государственная гравиметрическая сеть.

При создании и последующем совершенствовании опорных геодезических сетей возникает большой круг научно-технических проблем и задач, включающих в том числе разработку:

- научно обоснованных программных и методических вопросов построения опорных геодезических сетей с наивысшей точностью, доступной при использовании новейших достижений геодезической науки и техники;

- средств и методов надежного закрепления геодезических сетей на местности, создаваемых в различных физико-географических и климатических зонах с учетом длительного срока их службы;
- наиболее совершенных методов и точных приборов, для производства высокоточных измерений

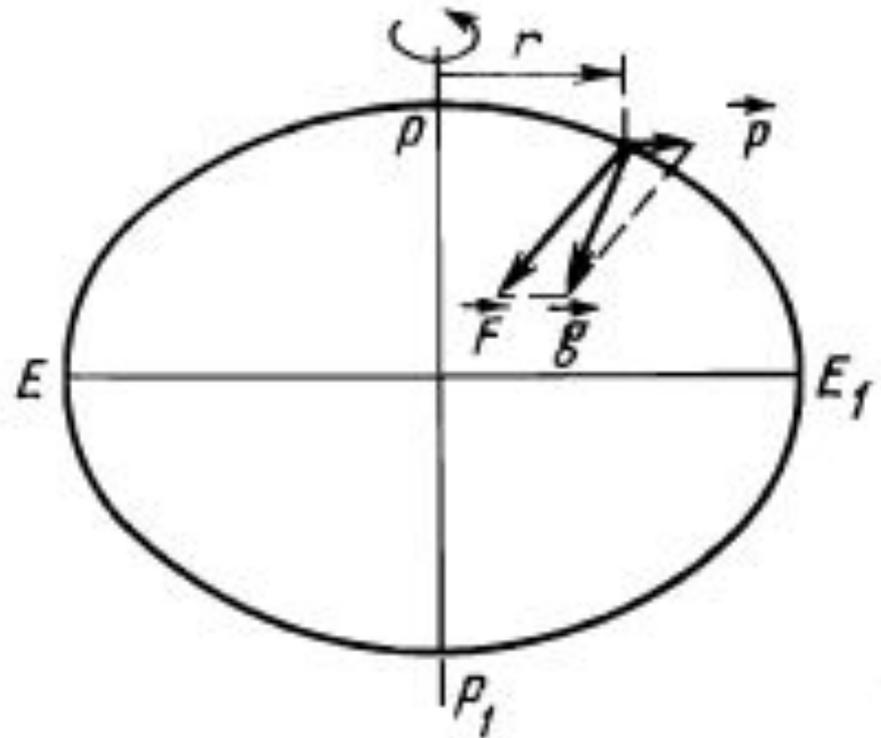
- эффективных математически строгих теорий и методов совместной обработки результатов всего комплекса измерений с целью наиболее точного определения координат и высот геодезических пунктов, а также параметров фигуры и гравитационного поля Земли;
- эффективных методов и средств определения учета влияний внешней среды на результаты измерений;

# СИЛА ТЯЖЕСТИ И УРОВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

При производстве высокоточных измерений всякий раз тщательно совмещают вертикальную ось измерительного прибора с отвесной линией в точке его установки. Направление отвесной линии в каждой точке пространства совпадает с направлением действия силы тяжести. Сила тяжести является равнодействующей двух основных сил:

силы земного притяжения  $F$  и центробежной силы  $P$ , возникающей вследствие суточного вращения материальной точки вокруг оси вращения

Земли. В каждой данной точке вектор силы тяжести  $g$  равен сумме векторов  $F$  и  $P$ , т. е.  $g = F + P$ .



$$F = f \frac{Mm}{R^2}$$

где  $f$  — универсальная

гравитационная постоянная;

$M$  — масса Земли;

$m$  — масса материальной точки;

$R$  — радиус земного шара.

Для реальной Земли сила притяжения  $F$  не равна значению, вычисленному по формуле, и направлена не к центру масс Земли.

Центробежная сила  $P$  направлена вдоль радиуса параллели, на которой находится материальная точка,

и определяется по формуле  $P = mr\omega^2$

где  $m$  — масса материальной точки;

$r$  — радиус параллели;

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

Наибольшей величины центробежная сила достигает на экваторе: где  $r=a$  — большая полуось Земли, а наименьшей —

на полюсах Земли:  $r=0$ , На экваторе

сила  $P$  в 288 раз меньше силы  $F$ .

Силы  $F$  и  $P$  имеют противоположные знаки

Сила  $P$  при переходе от экватора к полюсам Земли уменьшается. Поэтому сила тяжести  $g$  изменяется по широте и достигает наибольшей величины на полюсах, а наименьшей — на экваторе Земли.

За единицу ускорения силы тяжести системе единиц СИ принята величина  $1 \text{ м} \cdot \text{с}^2$ . В гравиметрии широко применяется единица, называемая галом  $1 \text{ Гал} = 1 \text{ см} \cdot \text{с}^2 = 0,01 \text{ м} \cdot \text{с}^2$ . Обычно вместо выражения «ускорение силы тяжести» допускается употреблять выражение «сила тяжести».

В гравиметрии при измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли, для описания поля силы тяжести используют скалярную функцию — потенциал. Потенциал вектора — функция координат, частные производные которой по прямоугольным координатам равны проекциям вектора на соответствующие координатные оси. Потенциал силы тяжести  $W$  равен сумме потенциала  $V$  силы притяжения  $F$  и потенциала  $Q$  центробежной силы  $P$ , т. е.  $W = V + Q$ .

Производная от потенциала силы тяжести  $W$  по любому направлению  $s$  в точке равна проекции этой силы на данное направление,

т. е. 
$$\frac{dW}{ds} = g \cos (g, s)$$

где  $g$ — значение силы тяжести в точке;

$(g, s)$ —угол между направлением действия силы тяжести и направлением  $s$ , по которому перемещается единичная масса.

Предположим, что материальная точка  $A$  перемещается под прямым углом к вектору силы тяжести  $g$ .

В этом случае угол  $(g, s)=90$ ,  $\cos(g, s)=0$

$$\frac{dW}{ds} = 0, \text{ или } dW = 0$$

Проинтегрировав выражение, получим уравнение семейства поверхностей

$$W = C = \text{const.}$$

**Поверхность, во всех точках которой потенциал силы тяжести имеет одно и то же значение ( $W = \text{const}$ ), называется уровенной поверхностью Земли.**

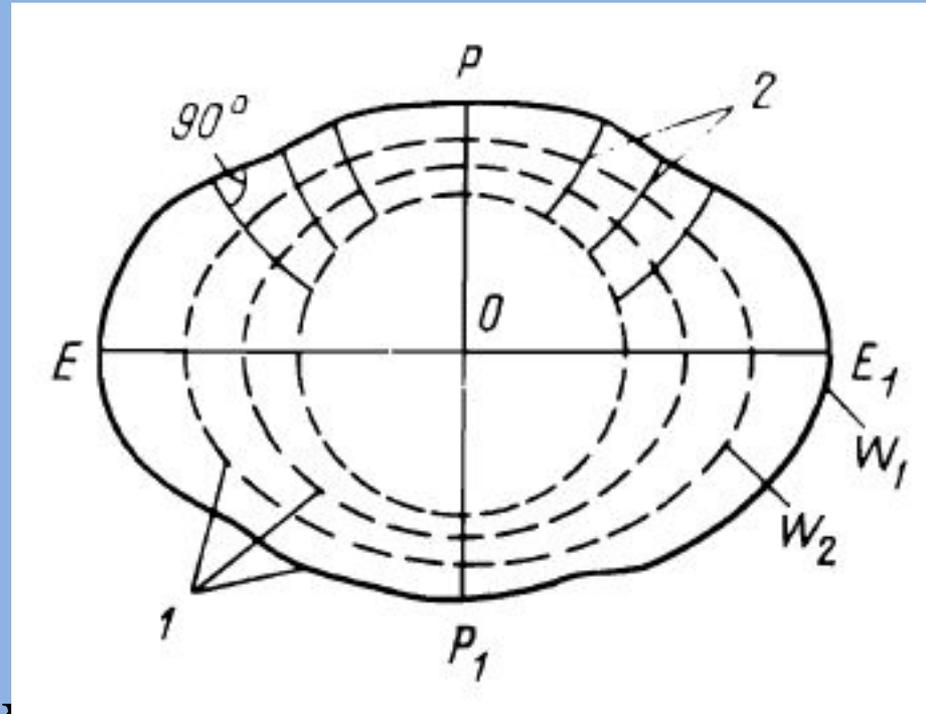
Принимая различные значения постоянной  $C$ , получим

соответствующие уровенные поверхности

Через каждую точку пространства проходит только одна уровенная поверхность.

В каждой точке уровенной поверхности

вектор силы тяжести направлен по нормали к ней. Уровенные поверхности являются поверхностями равновесия, так как составляющая



силы тяжести по касательной к уровенной поверхности в любой ее точке равна нулю.

*Отметим что поверхность воды в спокойном состоянии, находящаяся под действием только силы тяжести, совпадает с одной из уровенных поверхностей.*

Кривая, пересекающая уровенные поверхности  $W_1, W_2 \dots$  под прямыми углами, называется силовой линией гравитационного поля Земли.

Касательные во всех точках силовой линии совпадают с направлением действия силы тяжести и перпендикулярны к уровенным поверхностям.

Пусть материальная точка  $A$  с одной уровенной поверхности  $W$  переместится по направлению вектора силы тяжести  $g$  на другую поверхность  $W_1 = W + dW$  находящуюся на бесконечно малом расстоянии  $ds = dh$ . В этом случае угол  $(g, s)$  равен нулю;  $\cos (g, s) = 1$

и поэтому уравнение примет вид

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dh} = g \quad \text{или} \quad dW = gdh$$

Из этого следует, что дифференциал  $dh$  расстояния между двумя бесконечно близкими уровнями поверхностями

$W$  и  $W_1 = W + dW$  равен величине

$$dh = \frac{dW}{g}$$

Анализируя формулу, можно сделать следующие общие выводы:

1. Уровенные поверхности Земли нигде не соприкасаются между собой и не пересекаются.

2. Уровенные поверхности Земли не параллельны между собой: на полюсе они сближаются, а на экваторе, наоборот, удаляются одна от другой.

3. Уровенные поверхности Земли имеют волнообразный вид из-за наличия внутри Земли аномальных по плотности масс.





В качестве координатной поверхности в геодезии принимается поверхность **земного эллипсоида** (геометрическая модель Земли). Под земным эллипсоидом понимают поверхность эллипсоида вращения, форма и размеры которого определяются из совместной математической обработки астрономических, гравиметрических и геодезических измерений, выполненных на физической поверхности Земли. Под физической моделью Земли понимают **геоид**, тело которого ограничено гладкой, всюду выпуклой поверхностью, в каждой точке которой вектор силы тяжести является нормалью, а поле силы тяжести имеет характеристики, идентичные характеристикам поля силы тяжести реальной Земли (**реальное гравитационное поле**).

В зависимости от ориентировки в теле Земли, различают **общий земной эллипсоид**, ось вращения и плоскость экватора которого совпадают с осью вращения и плоскостью экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Поверхность общего земного эллипсоида наилучшим образом подходит ко всей поверхности геоида. Если эллипсоид ориентируется в теле Земли так, чтобы наилучшим образом подходить к некоторой части поверхности геоида, например, на территории отдельного государства или группы государств, такой эллипсоид называют **референц – эллипсоидом**.

Ориентировка поверхности референц – эллипсоида производится установлением исходных геодезических дат для центра геодезического пункта, который является исходным для всей государственной геодезической сети.

Ось вращения и плоскость экватора референц – эллипсоида параллельны оси вращения и плоскости экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Земной эллипсоид с принятыми физическими характеристиками называют **Нормальной Землей**, формирующей **нормальное гравитационное поле**, характеристики которого получают из вычислений. Разности ускорений силы тяжести в реальном и нормальном полях определяют **аномальное гравитационное поле**. Геометрическими характеристиками этого поля служат величины, характеризующие непараллельность поверхностей геоида и земного эллипсоида – **уклонения отвеса** и высоты поверхности геоида над эллипсоидом – **аномалии высот**.

Положение точек определяется **пространственными геодезическими координатами**: широтой  $B$ , долготой  $L$ , высотой  $H$ . **Геодезической широтой** точки называется угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида с плоскостью его экватора, **геодезической долготой** – двугранный угол, образованный меридианом данной точки с начальным меридианом, **геодезической высотой** – отрезок нормали к поверхности эллипсоида. **Геодезический меридиан** - геометрическое место точек равных долгот, он получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью, содержащей в себе ось его вращения, **геодезическая параллель** - геометрическое место точек равных широт, получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью перпендикулярной оси его вращения.

Все меридианы земного эллипсоида – эллипсы, а параллели – окружности. Параллель наибольшего радиуса называется **геодезическим экватором**.

При использовании СРНС, когда носители координат – ИСЗ могут находиться на значительных высотах над эллипсоидом, широкое применение нашли **системы пространственных прямоугольных координат (X,Y,Z)**, центр которых совпадает с геометрическим центром земного эллипсоида, оси абсцисс и ординат лежат в плоскости экватора, образуя правую систему координат, ось аппликат совпадает с осью вращения эллипсоида.

В сфероидической геодезии используется также система полярных координат – азимуты геодезических линий и их длины ( геодезические азимуты и расстояния на поверхности эллипсоида ), которые получаются путем редуцирования на поверхность эллипсоида результатов угловых и линейных измерений. **Геодезическим азимутом** направления в данной точке называется угол, образованный геодезической линией и геодезическим меридианом данной точки. Сфероидическая геодезия решает задачи определения взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида, используя его геометрию, связь между системами координат.

# ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

Поверхность земного эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси и имеет те же параметры, что и образующий ее эллипс. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых его фокусами, постоянна и равна большой оси эллипса.

Уравнение эллипса в системе плоских прямоугольных координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

где  $a$  – большая и  $b$  – малая полуоси, являются линейными параметрами эллипса и определяют его форму и размеры.

Для решения задач сфероидической геодезии применяют также относительные параметры эллипсоида вращения, которые связаны с большой и малой полуосями и характеризуют его форму:

$$\text{полярное сжатие} \quad \alpha = \frac{a-b}{a}; \quad (2.2)$$

$$\text{эксцентриситет} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad (2.3)$$

$$\text{второй эксцентриситет} \quad e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.4)$$

Для однозначного определения поверхности эллипсоида вращения необходимо знать два параметра, один из которых обязательно должен быть линейным. Для эллипсоида Красовского, как известно, большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м и полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298.3$ ,

по которым можно вычислить следующие значения параметров:

$$b = 6\,356\,863.0188 \text{ м}; \alpha = 0.003\,352\,3299;$$

$$e^2 = 0.006\,693\,4216; e'^2 = 0.006\,738\,5254.$$

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2}};$$

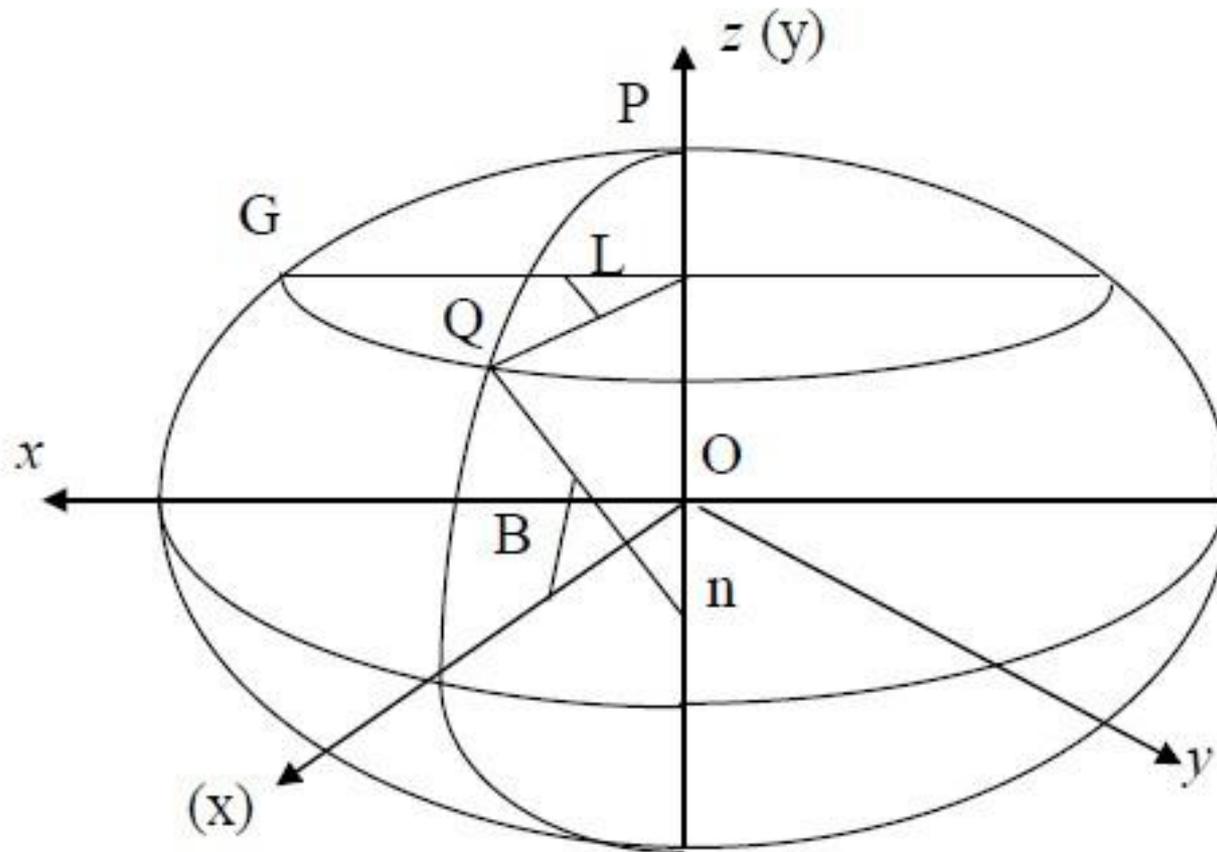
$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2; \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2};$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}; \quad \frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{e}{e'}.$$

Для приближенных расчетов полезно запомнить округленные значения параметров земного эллипсоида:  $a \approx 6\,400$  км,  $a - b \approx 21$  км,  $\alpha \approx 1 : 300$  ( $3 \cdot 10^{-3}$ ),  $e^2 \approx e'^2 \approx 2\alpha \approx 1 : 150$  ( $7 \cdot 10^{-3}$ ).

# СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Начало пространственной прямоугольной системы координат совпадает с центром эллипсоида  $O$ , ось  $Oz$  совпадает с осью его вращения  $OP$ , ось  $Ox$  лежит на пересечении плоскостей экватора и гринвичского меридиана  $PG$ , ось  $Oy$  дополняет систему координат до правой. На рис. кроме того, имеем:  $B, L$  – геодезические широта и долгота;

Если принять  $x = 0$  или  $y = 0$ , получим уравнения меридианных эллипсов

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Если принять  $z = 0$ , получим уравнение геодезическо-го экватора, который представляет собой окружность радиуса  $a$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$$

На следующем рис. изображены системы координат, определяющие положение точки  $Q$  на меридианном эллипсе:

плоские прямоугольные  $x, y$  ;

геодезическую широту  $B$ ;

геоцентрическую широту  $\Phi$  – угол, образованный геоцентрическим радиус-вектором  $OQ$  с плоскостью экватора;

приведенную широту  $u$  – угол, образованный отрезком прямой  $Q_1Q_2O$  с плоскостью экватора, где  $Q_1$  и  $Q_2$  – проекции точки  $Q$  на окружности радиусов  $a$  и  $b$ , описанные вокруг точки  $O$  как центра.

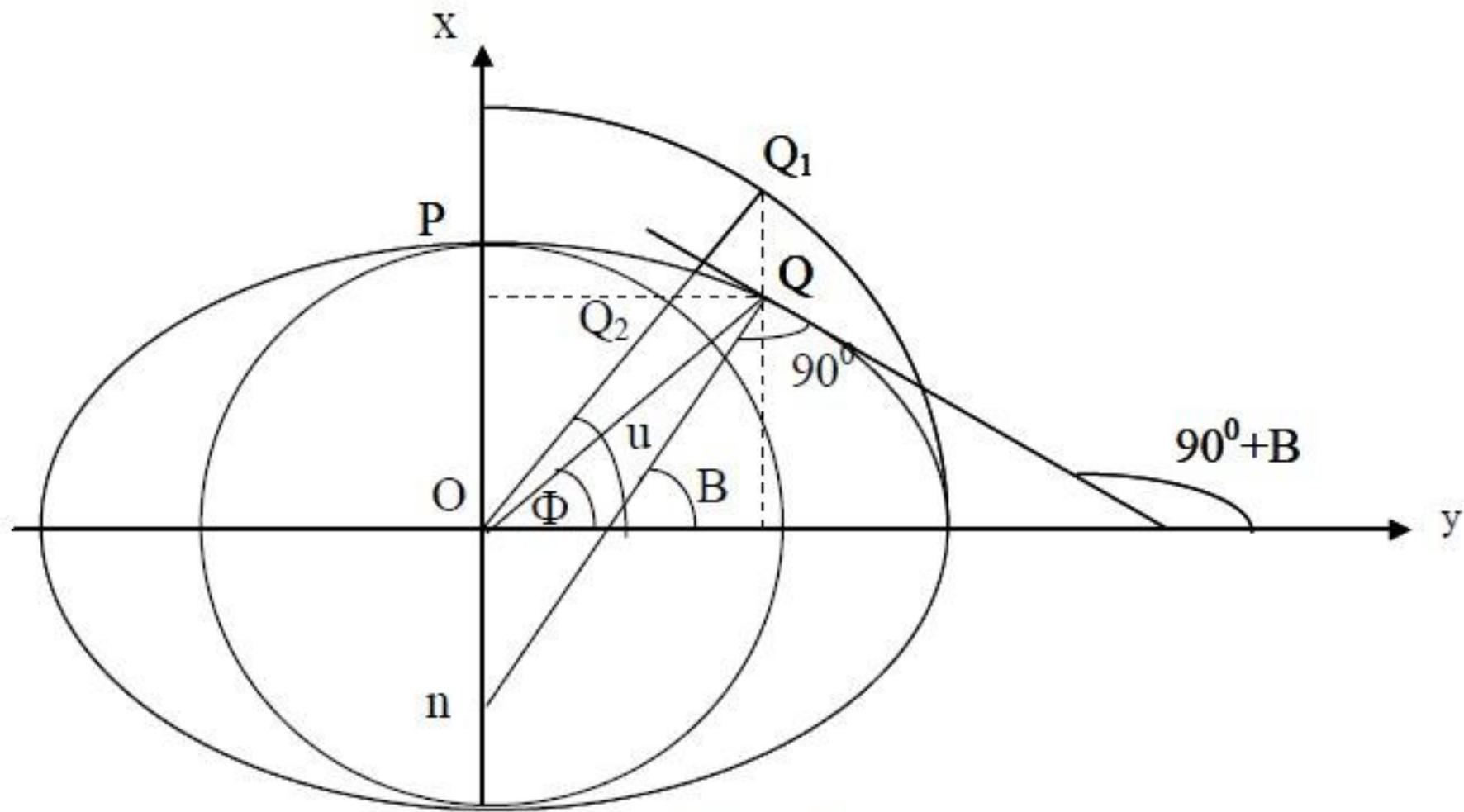


Рис. 3. 2

Для геоцентрической широты имеем уравнение связи из рисунка

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x} \quad (3.2)$$

Для приведенной широты имеем

$$a \cos u = x; \quad b \sin u = y \quad , \quad (3.3)$$

откуда получаем выражение

$$\operatorname{tgu} = \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{y}{x} \quad (3.4)$$

Сравнивая выражения (3.2) и (3.4), получаем уравнение связи геоцентрической и приведенной широт

$$\operatorname{tgu} = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \Phi \quad . \quad (3.5)$$

Используя полученные уравнения, а также имея в виду уравнения ( 3. 4 ), получаем выражения для плоских прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  в функции широт:

$$x = a \cos u; \quad y = b \sin u \quad (3. 10)$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}; \quad y = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (3. 11)$$

$$x = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \cos \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}}; \quad y = \frac{a\sqrt{1 - e^2} \sin \Phi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}} \quad (3. 12)$$

## **Классификация кривых на поверхности эллипсоида**

рассмотрим следующие линии на поверхности земного эллипсоида:

**Плоские сечения** – линии, образованные как след пересечения поверхности некоторой плоскостью. В зависимости от того, как ориентирована плоскость сечения относительно поверхности, различают: **нормальные сечения** в данной точке, если плоскость сечения содержит в себе нормаль к поверхности в данной точке,

**центральные сечения**, когда плоскость содержит в себе центр эллипсоида, в этом случае всегда сечение будет нормальным в экваториальных точках.

Если нормальное сечение проходит в азимуте, равном  $90^\circ$ , его называют **первым вертикалом** эллипсоида в данной точке, радиус которого равен  $N$ , выражение которого приведено в формуле

$$x = (N + H) \cos B \cos L; y = (N + H) \cos B \sin L; z = [N(1 - e^2) + H] \sin B \quad (3.16)$$

Здесь принято обозначение:  $N = \frac{a}{W}$  - отрезок  $Qn$  на рисунке 3. 1.

**Геодезическая линия** – кратчайшая кривая между двумя точками на поверхности. Следует заметить, что геодезические линии на любой поверхности играют особую роль ( прямые на плоскости, дуги больших кругов на сфере и др. ).

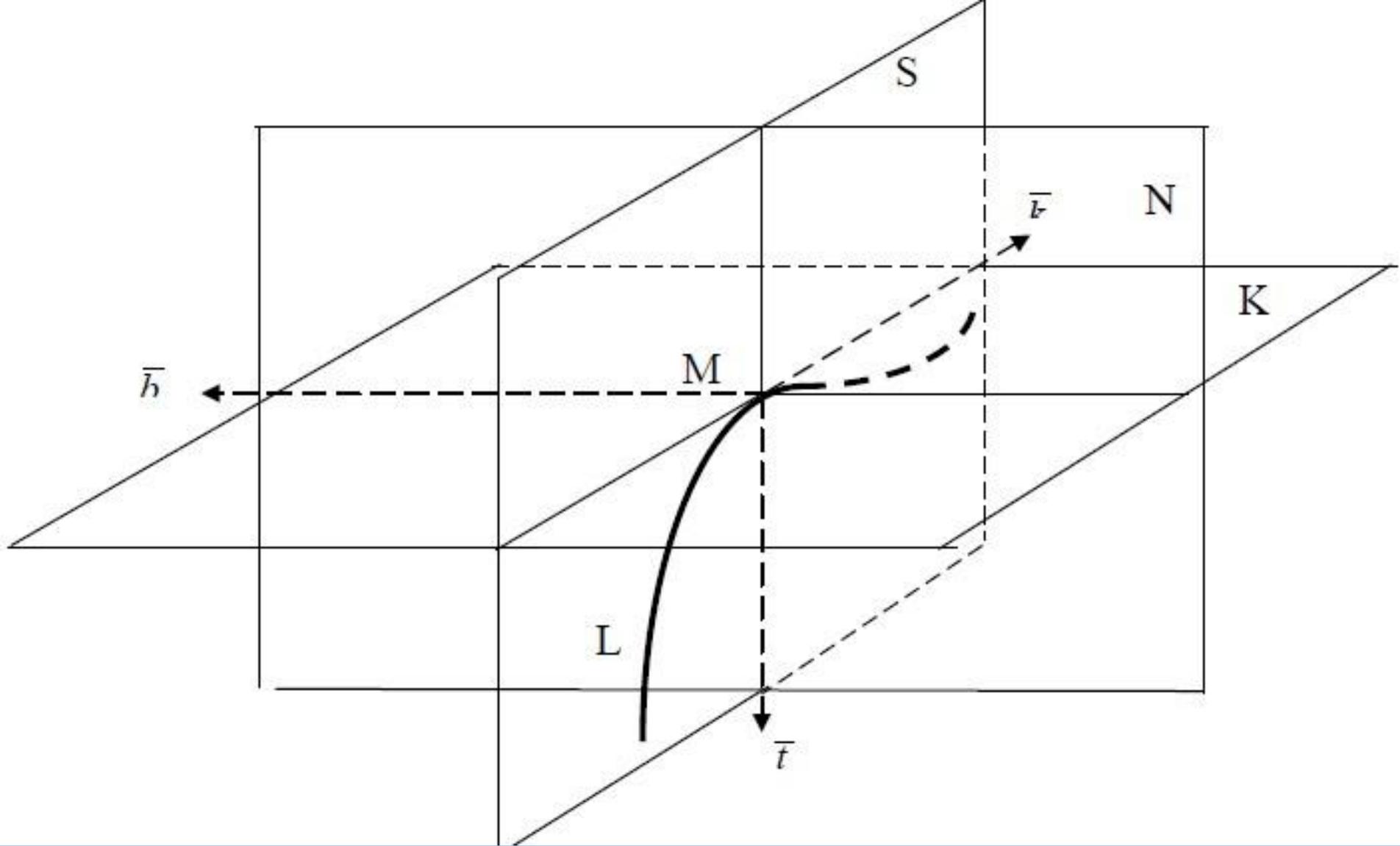
В каждой точке кривой можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости и прямые, образующие **сопровождающий трехгранник кривой**:

- **касательную плоскость  $K$**  к поверхности и **вектор касательной  $K$**  кривой  $L$  в точке  $M$ , имеющие одну общую точку с поверхностью и кривой;
- **нормальную плоскость  $N$** , которая перпендикулярна касательной плоскости – все прямые, лежащие в нормальной плоскости и проходящие через точку  $M$ , называются **векторами нормалей к кривой** в данной точке, один из которых перпендикулярен касательной плоскости и называется **нормалью  $n$**  к поверхности в данной точке;

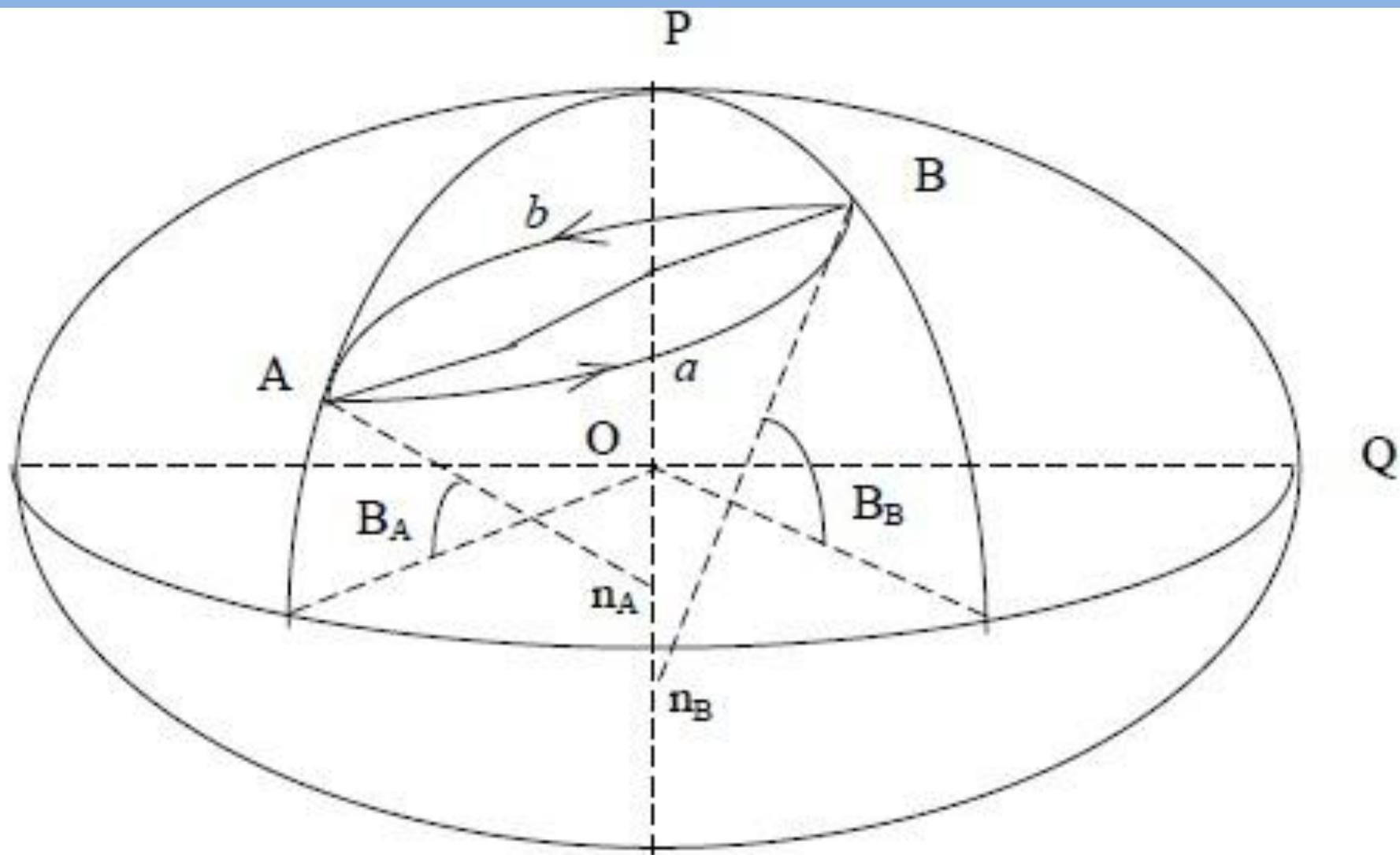
- **соприкасающуюся плоскость кривой  $S$** , проходящую через три бесконечно близкие точки кривой, вектор нормали, лежащий на пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей называется **главной нормалью кривой  $t$**  ;

- **бинормаль  $b$**  - нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости;

Любая плоская кривая ( следовательно, и плоское сечение на поверхности ) имеет одну соприкасающуюся плоскость. У геодезической линии в каждой ее точке главная нормаль кривой  $t$  совпадает с нормалью  $N$  к поверхности в данной точке. Для произвольных кривых на поверхностях точки, в которых эти два вектора совпадают, называются **геодезическими точками**.



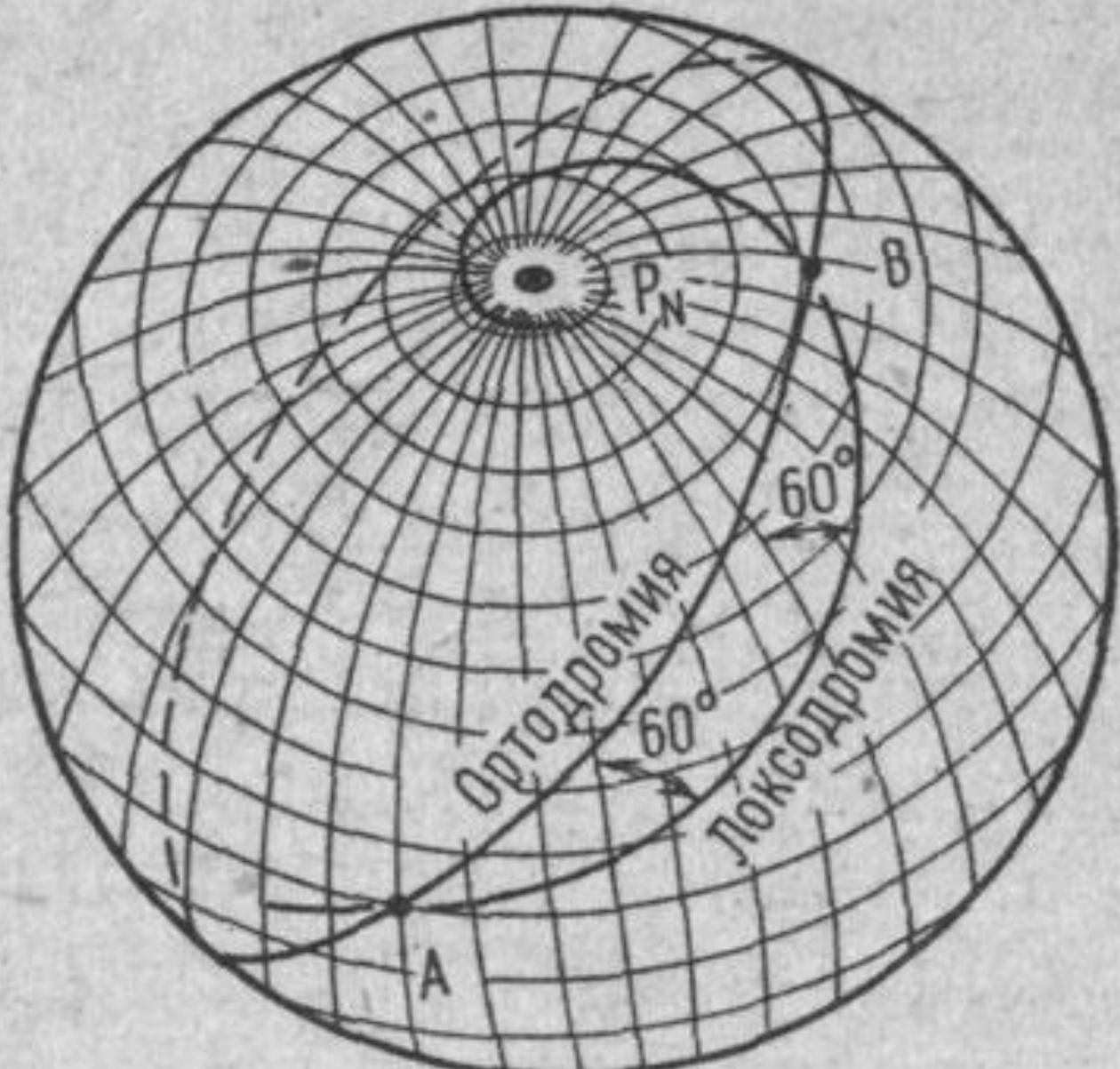
Если на поверхности эллипсоида имеем две точки  $A$  и  $B$ , то между ними можно провести как геодезическую линию ( одну единственную ), так и нормальное как в одной, так и другой точках сечения. Если эти точки не лежат на одной параллели (  $B_A \neq B_B$  ), что чаще всего может иметь место на практике, то получаем два взаимно нормальных сечения  $AaB$  и  $BbA$ , плоскости которых пройдут: для прямого нормального сечения в точке  $A$  - через точку  $B$  и нормаль  $Ap_A$ , для прямого нормального сечения в точке  $B$  - через точку  $A$  и нормаль  $Bp_B$ . Эти сечения не совпадут друг с другом потому, что нормали к поверхности эллипсоида  $Ap_A$  и  $Bp_B$  в данных точках не лежат в одной плоскости, а образуют скрещивающиеся прямые. Это хорошо видно из рисунка

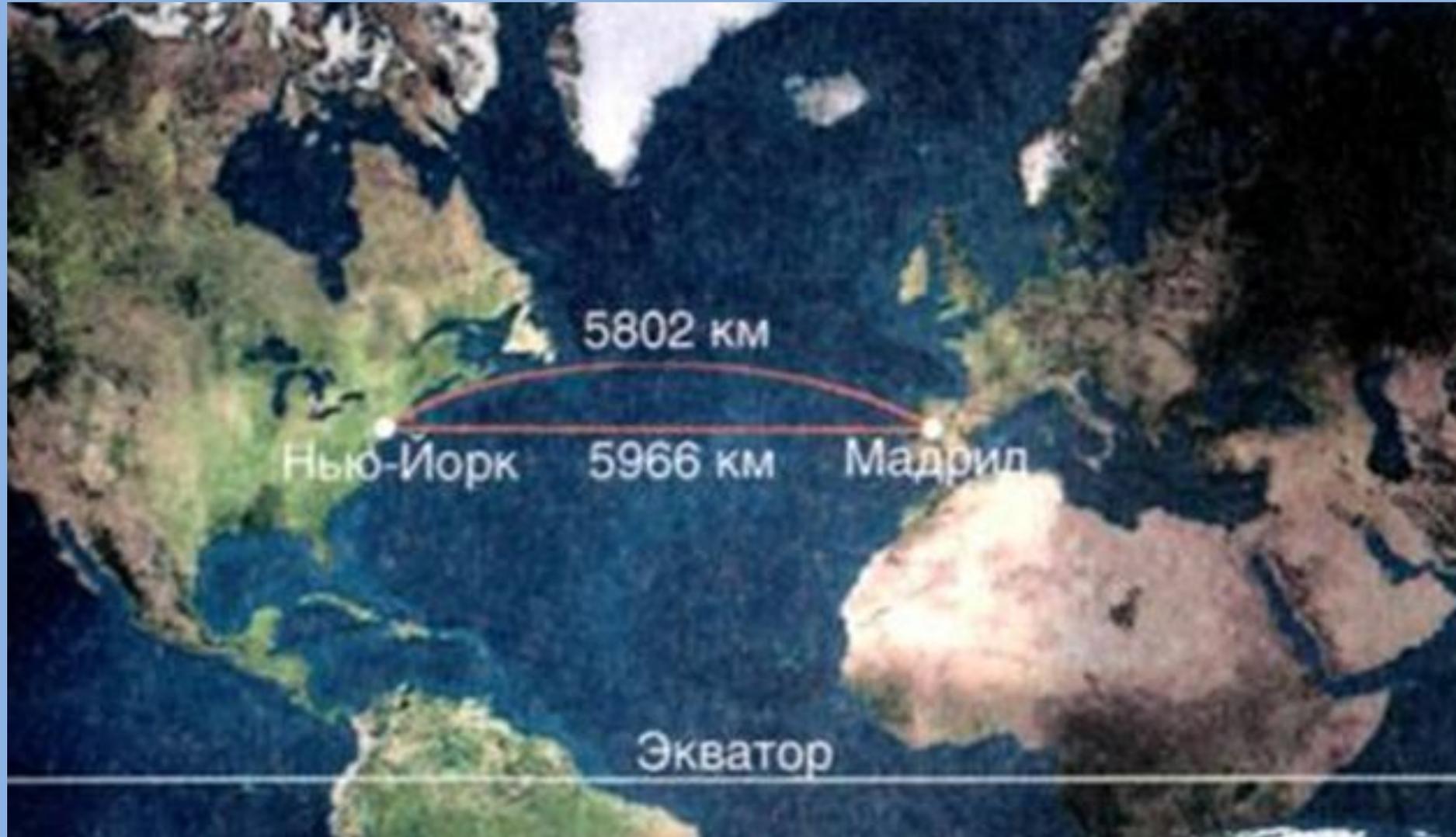


\*Если судно совершает плавание между двумя пунктами и перемещается постоянным курсом, то оно пересечет все меридианы под одним и тем же углом и его путь изобразится кривой линией, которая называется **локсодромией** (в переводе с греческого означает "косой бег"). Локсодромия на поверхности Земли изображается в виде спирали, которая приближается к полюсу, но никогда его не достигает. Плавание судна по локсодромии очень удобно, так как оно совершается одним и тем же курсом и упрощает расчеты на все время перехода. Однако плавание по локсодромии не является наиболее кратчайшим расстоянием между двумя пунктами перехода.

Кратчайшим расстоянием между двумя точками А и В на земной поверхности является дуга большого круга,

проходящая через эти две точки и называемая **ортодромией** (в переводе с греческого "прямой бег"). Ортодромия пересекает меридианы под разными углами. При плавании на небольшие расстояния разность в длине между локсодромией и ортодромией незначительна и поэтому ею пренебрегают, поскольку плавание по локсодромии удобнее. Однако при длительных океанских переходах плавание совершают по ортодромии, т. е. по дуге большого круга.





5802 км

Нью-Йорк

5966 км

Мадрид

Экватор

Учитывая изложенное, заметим, что меридианы и параллели земного эллипсоида представляют собой плоские сечения. При этом меридианы – нормальные сечения, состоящие сплошь из геодезических точек, следовательно, они являются также геодезическими линиями. Заметим, что геодезические линии эллипсоида, проходящие в произвольном азимуте, не являются плоскими кривыми. Меридиан является исключением. Параллели земного эллипсоида являются наклонными по отношению к нормали плоскими сечениями. Более того, выражая радиус параллели  $r$  через радиус первого вертикала  $N$ , замечаем угол наклона плоскости параллели к нормали, которая лежит в плоскости первого вертикала, равный геодезической широте

$$r = N \cos B$$

Это уравнение вида устанавливает связь между радиусами кривизны наклонных и нормальных плоских сечений и выражает **теорему Менье**.

Можно отметить, что параллель наибольшего радиуса ( экватор ) является нормальным сечением и геодезической линией.

В теории поверхностей координатные сетки в виде меридианов и параллелей, когда одна координатная линия является геодезической, а другая негеодезическая, называют полугеодезическими.

## Длина дуги меридиана

Меридиан земного эллипсоида представляет собой эллипс, радиус кривизны которого определяется величиной  $M$ , зависящей от широты. Длина дуги любой кривой переменного радиуса может быть вычислена по известной формуле дифференциальной геометрии, которая применительно к меридиану имеет выражение

$$s = \int_{B_1}^{B_2} M dB = \int_{B_1}^{B_2} \frac{c}{V^3} dB = c \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^{3/2}}$$

Здесь  $B^1$  и  $B^2$  широты, для которых определяется длина меридиана. Интеграл не берется в замкнутом виде в элементарных функциях. Для его вычисления возможны лишь приближенные методы интегрирования.

## Длина дуги параллели

Радиус параллели, как видно из формулы ( 4. 10 ), не зависит от долготы и для данной параллели имеет постоянное значение ( параллель – окружность ), поэтому для вычисления длины дуги параллели применяют формулу

$$S_{\text{пар.}} = r (L_2 - L_1) = \frac{c}{V} \cos B (L_2 - L_1)$$

В отличие от меридиана, длина дуги параллели, соответствующая одинаковой разности долгот, различается. Если на экваторе эти значения близки к тому, что имеет место на меридиане, то, например, на широте в  $60^\circ$  ( $\cos 60^\circ = 0.5$ ) они будут в два раза меньше.

# РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Основным видом построений в государственных геодезических сетях являются треугольники триангуляции и трилатерации. Для того, чтобы использовать эти треугольники для передачи координат от исходных к определяемым пунктам необходимо знать как длины их сторон, так и внутренние углы. В процессе предварительных вычислений вводят поправки в измеренные углы ( в триангуляции ) и длины сторон ( в трилатерации ) за редуцирование с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида. В результате получают **сфероидические треугольники**, сторонами которых служат геодезические линии эллипсоида.

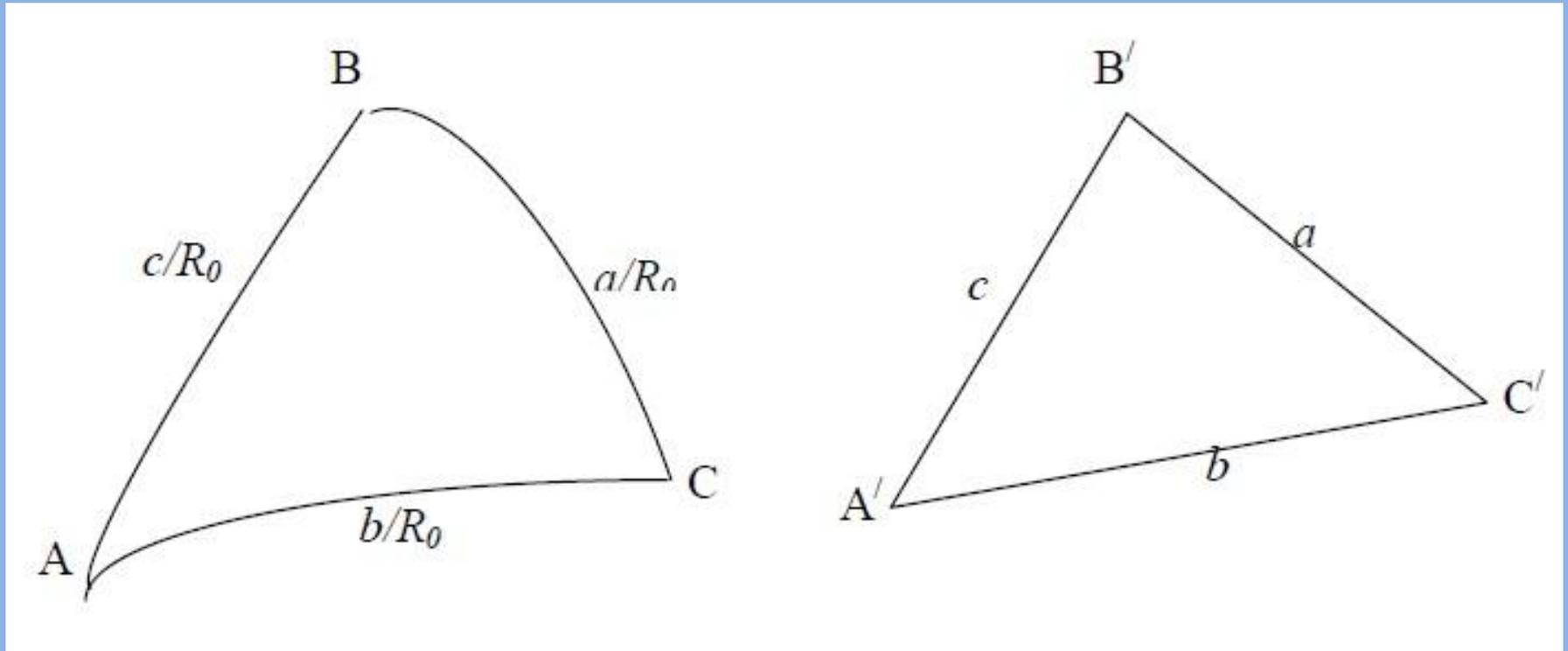
Проблема решения этой задачи заключается в том, что не существует формул сфероидической тригонометрии, подобных формулам плоской и сферической тригонометрии. Вместе с тем замечаем: во – первых, полярное сжатие земного эллипсоида величина малая, во – вторых, длины сторон сфероидических треугольников – малые величины по сравнению с радиусом кривизны эллипсоида. Другими словами, когда элементы сфероидического треугольника будут с необходимой точностью соответствовать элементам сферического треугольника. В этом случае треугольники можно решать как сферические

Такое возможно, если сеть треугольников располагается в сфероидическом поясе шириной до 300 км. В этом случае длины сторон треугольников первого и последующих классов будут отличаться на величину, не более 0.001 м, а углы – 0.001<sup>''</sup>. При точности, на порядок ниже, ширина пояса может достигать 570 км.

Решение треугольников по формулам сферической тригонометрии не удобно на практике, когда длины сторон нужно выражать в долях радиуса ( $S / R^0$ ), поэтому в геодезии применяют методы решения малых сферических треугольников по формулам плоской тригонометрии, основанным на теореме Лежандра и способе аддитаментов.

# Теорема Лежандра

Пусть мы имеем сферический треугольник  $ABC$  на сфере радиуса  $R_0$ . Возьмем плоский треугольник  $A'B'C'$  с соответственно равными сторонами (рис.). Углы этих треугольников, расположенные против соответственно равных сторон, не будут равны соответствующим углам сферического треугольника.



Применяя теорему косинуса стороны для сферического треугольника ABC, запишем

$$\cos \frac{a}{R_0} = \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0} + \sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0} \cos A, \quad (5.1)$$

откуда можем выразить

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R_0} - \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0}}{\sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0}}. \quad (5.2)$$

Стороны треугольника малы по сравнению с радиусом  $R_0$ , поэтому тригонометрические функции малых аргументов разложим в ряд Маклорена, ограничиваясь четвертыми степенями аргументов  $s/R_0$ , в результате получим вместо (5.2)

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R_0^2} + \frac{a^4}{24R_0^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R_0^2} + \frac{b^4}{24R_0^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R_0^2} + \frac{c^4}{24R_0^4}\right)}{\left(\frac{b}{R_0} - \frac{b^3}{6R_0^3}\right) \left(\frac{c}{R_0} - \frac{c^3}{6R_0^3}\right)} \quad (5.3)$$

наибольший из отброшенных членов разложений в ( 5. 3 )  
будет

$$\frac{s^5}{120R_0^5} \leq 5 \cdot 10^{-10}, \quad s \leq R_0 * 10^{-2} (600)^{1/5} \approx 230 \text{ км.}$$

Преобразуем выражение ( 5. 3 ) с принятой точностью и  
получим

Откуда несложно получить после приведения подобных членов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R_0^2bc} \quad (5.4)$$

Обратимся теперь к плоскому треугольнику на рис. 5. 1. Для него можем  
записать по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'; \quad \cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

И выражение для  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\sin^2 A' = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}$$

Преобразуя разность косинусов в произведение и полагая

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \frac{A - A'}{2}; \sin \frac{A + A'}{2} = \sin A',$$

получим вместо ( 5. 5 ) для разности сферического и соответствующего плоского углов выражение

$$A - A' = \frac{bc \sin A'}{6R_0^2}$$

Несложно заметить, что  $P = -\frac{bc \sin A'}{2}$  выражает площадь треуголь-

ника, поэтому для разности любых углов сферического и плоского треугольников справедливы выражения

$$A - A' = B - B' = C - C' = \frac{P}{3R_0^2}$$

Поскольку сумма внутренних углов плоского треугольника всегда равна  $\pi$ , можем записать для суммы углов сферического треугольника

$$A + B + C = \pi + \frac{P}{R_0^2} \quad (5. 6)$$

Величина, определяющая в ( 5. 6 ) насколько сумма внутренних углов сферического треугольника больше  $\pi$ , носит название сферического избытка и обозначается  $\varepsilon$ . Отсюда следует вывод, что сферический избыток треугольника ( как и любого многоугольника на сфере ) прямо пропорционален площади и обратно пропорционален квадрату радиуса сферы, что и выражает теорему Лежандра. При этом каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на величину одной трети сферического избытка ( для  $n$  – угольника – больше на величину  $\varepsilon / n$  ).

Сферический избыток может достигать в общем случае величины до  $2\pi$ . Для малых треугольников, которые мы рассматриваем, эта величина малая и ее выражают в секундах, поэтому формула для вычисления сферического избытка имеет вид

$$\varepsilon'' = \frac{P''}{R_0^2} P \quad (5.7)$$

Для вычисления площади  $P$  треугольника можно применять любую формулу. Так

в трилатерации измерены длины сторон, а углы неизвестны, поэтому здесь более удобно вычислять площадь треугольника по формуле Герона

Из формулы ( 5. 7 ) видно, что наибольший сферический избыток ( при заданном порядке длин сторон ) будет иметь равносторонний треугольник. Величина  $f = \rho'' / 2R^2$  изменяется с широтой очень медленно. Учитывая, что сферический избыток даже в сети 1 класса с длинами сторон до 60 км не превышает  $8''$ , а точность вычисления углов –  $0.001''$ , при его вычислении достаточно удерживать четыре верные значащие цифры. Это значит, что при его вычислении можно пренебречь различием площадей сферического и плоского треугольников

Порядок решения сети треугольников триангуляции по теореме Лежандра будет следующим:

- определяют порядок решения треугольников сети так, чтобы последовательно производилась передача длин сторон из треугольника в треугольник, в конечном итоге замыкалась на исходную сторону;
- по длине стороны и измеренным углам вычисляют сферический избыток по формулам ( 5. 7 ) – ( 5. 8 ) в триангуляции 1 класса с округлением до  $0.001''$ , в триангуляции 2 класса – до  $0.01''$ ;
- вычитают из измеренных значений углов треугольника одну треть сферического избытка – получают измеренные приведенные плоские углы

- вычисляют невязку треугольника и вычитают одну треть ее из каждого угла – получают уравненные плоские приведенные углы треугольника;

- по теореме синусов плоской тригонометрии вычисляют неизвестные две стороны треугольника с контролем

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}; c = a \frac{\sin C}{\sin A} = b \frac{\sin C}{\sin B}$$

расхождение значений стороны  $c$ , полученное в треугольнике дважды, не должно превышать 0.001 м.

В том случае, когда решаются треугольники, объединенные в сеть, необходимо последний из решаемых треугольников выбрать так, чтобы он примыкал к первому.

И в этом случае контролем правильного решения будет условие, что расхождение в длине стороны, полученной дважды, не превышает величины 0.001м.

# ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Основной задачей геодезии является определение координат точек земной поверхности и околоземного пространства. Координатной поверхностью в геодезии, как известно, является поверхность земного эллипсоида. Таким образом, задача сводится к вычислению сфероидических координат по результатам спутниковых, астрономических, гравиметрических и геодезических измерений с использованием геометрии земного эллипсоида.

На поверхности земного эллипсоида приняты две системы геодезических координат – параметрическая (широты и долготы, пространственные прямоугольные) и полярная (азимуты и расстояния).

Сущность главной геодезической задачи сводится к установлению связи между системой параметрических и полярных координат на поверхности эллипсоида.

\* под параметрическими координатами мы будем понимать геодезические широты и долготы.

**Прямая геодезическая задача:** по известным геодезическим широте ( $B^1$ ) и долготе ( $L^1$ ) одной точки, длине ( $S^{12}$ ) и азимуту ( $A^{12}$ ) геодезической линии до другой точки вычислить геодезические широту ( $B^2$ ) и долготу ( $L^2$ ) другой точки, а также обратный азимут ( $A^{21}$ ).

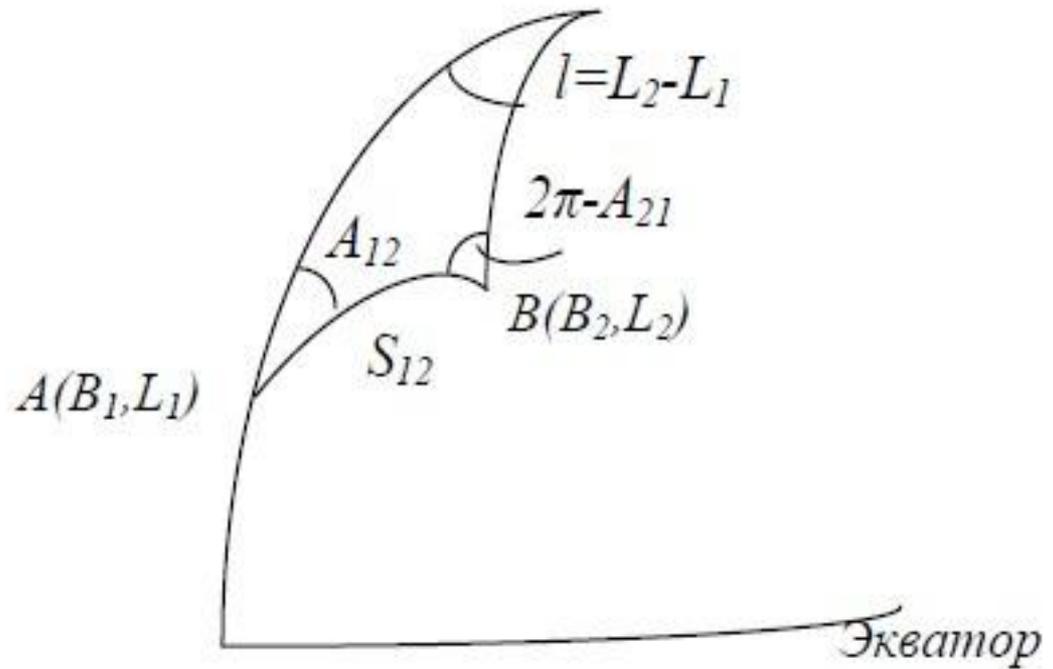
Требуется вычислить параметрические координаты определяемой точки, обратный азимут по ее полярным координатам, отсчитанным от исходной точки

**Обратная геодезическая задача:** по известным геодезическим широтам ( $B^1, B^2$ ) и долготам ( $L^1, L^2$ ) двух точек вычислить прямой и обратный азимуты ( $A^{12}, A^{21}$ ) и длину геодезической линии между ними ( $S^{12}$ ).

Здесь по известным параметрическим координатам двух точек вычисляются связывающие их полярные координаты.

Если бы шла речь о решении главной геодезической задачи на сфере единичного радиуса, то применимы формулы сферической тригонометрии для решения полярного сферического треугольника.

Замкнутых формул сфероидической тригонометрии не существует, поэтому решение главной геодезической



задачи на поверхности земного эллипсоида производится приближенными методами, в основе которых лежат различные пути приближенного интегрирования системы дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида вращения ( 4. 39 ),

которую запишем в следующем виде

$$b = B_2 - B_1 = \int_0^s \frac{\cos A}{M} ds; l = L_2 - L_1 = \int_0^s \frac{\sin A}{r} ds; a = A_{21} - A_{12} \pm \pi = \int_0^s \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B ds.$$

В связи с этим различают два пути решения главной геодезической задачи: **прямой и косвенный**. В прямом пути предполагается вычисление значений искомых величин по известным. В косвенном пути вычисляются разности между известными и искомыми величинами, которые затем вводятся в соответствующие значения известных величин для вычисления искомых.

**Система геодезических координат 1942 года** ( С– 42 ), введенная на территории Советского Союза с 1946 года, была за-креплена на земной поверхности центрами порядка 6 000 пунктов триангуляции 1 класса, объединенных в 87 полигонов и отнесенных к поверхности референц-эллипсоида Красовского. Параметры референц-эллипсоида Красовского установлены из градусных измерений, выполненных в мире к 40 – м годам XX столетия, и составляют: большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м , полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298,3$ . Его ориентировка в теле Земли определена исходными геодезическими датами, выведенными из градусных измерений, выполненных только на территории Советского Союза, для центра главного астронома – геодезического пункта в Пулковской обсерватории.

К концу XX столетия выполнено уравнивание астрономо-геодезической сети ( АГС ) 1–2 классов на территории бывшего СССР, включающей в себя 277 полигонов первого класса и порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов. Центры этих пунктов закрепляют на земной поверхности референцную систему геодезических координат 1995 года (СК–95), введенную с 1 июля 2002 г. Для геодезического обеспечения навигации и решения глобальных задач в настоящее время используют общеземные системы координат WGS–84(США) и ПЗ–90(РФ), полученные независимо друг от друга по наблюдениям геодезических, геодинамических и навигационных ИСЗ, и по наземным гравиметрическим данным. Параметры этих систем координат совпадают в пределах точности их определения.

Для системы ПЗ – 90 в качестве координатной принята поверхность зем-ного эллипсоида с параметрами: большая полуось  $a = 6\,378\,136$  м, полярное сжа-тие  $\alpha = 1 : 298, 257\,839$ . В системе WGS – 84 – соответственно:  $a = 6\,378\,137$  м,  $\alpha = 1 : 298, 257\,224$ .