



# ЭКОНОМЕТРИКА

## Лекция 2

### Спецификация моделей

# Принципы спецификации моделей

## Третий принцип спецификации моделей

Рассмотренные нами модели записаны при молчаливом допущении, что они остаются неизменными во времени. Из теории известно, что все переменные объекта изменяются со временем. Этот факт должен быть отражен в моделях. Для этого каждой переменной, которая изменяется со временем добавляется индекс “t”.

Например,  $Y_t^d$  означает, что переменная уровень спроса относится к текущему моменту времени.

С учетом сказанного модель (1.4) конкурентного рынка должна иметь вид:

$$\begin{aligned} Y_t^d &= a_0 + a_1 p_t + a_2 x_t \\ Y_t^s &= b_0 + b_1 p_t \\ Y_t^d &= Y_t^s \\ a_0, b_0, b_1 &\geq 0; \quad a_1 \leq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

# Принципы спецификации моделей

**Определение.** Экономические модели, значения переменных которых привязаны к моменту времени, называются **динамическими**

**Определение.** Переменные, связанные с моментом времени, называются **датированными**

Необходимость соотнесения переменных модели к моменту времени является третьим принципом спецификации модели

# Принципы спецификации моделей

- Дополнительно необходимо учесть, что
- экономические объекты обладают инертностью, т.е. не все переменные объекта «успевают» за временем
  - не каждая переменная модели может быть известна в текущий момент времени

Например, производитель не может мгновенно реорганизовать производство, чтобы увеличить или уменьшить выпуск продукции в соответствии с изменившимся спросом и он не знает какой будет равновесная цена

Для учета этого факта в моделях применяются переменные, отнесенные к прошлому периоду времени, значения которых в текущий момент уже известны

# Принципы спецификации моделей

С учетом сказанного, модель (2.1) следует записать в виде:

$$\begin{cases} Y_t^d = a_0 + a_1 p_t + a_2 x_t \\ Y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} \\ Y_t^d = Y_t^s \\ a_0, b_0, b_1 \geq 0; \quad a_1 \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

В модели (2.2) переменная  $p_{t-1}$  значение цены на продукцию в предыдущий период времени

**Замечание.** Модель (2.2) получила название «паутинная модель конкурентного рынка».

# Принципы спецификации моделей

**Определение.** Переменные модели, отнесенные к предыдущим моментам времени, называются **«лаговыми»**

**Определение.** Все лаговые переменные (эндогенные и экзогенные) и текущие экзогенные переменные составляют группу **«предопределенных»** переменных

**Уточнение.** В приведенной форме модели каждая текущая эндогенная переменная должна быть выражена через предопределенные переменные

# Принципы спецификации моделей

В модели (2.2) второе уравнение получило приведенную форму на этапе спецификации. Для полного преобразование модели (2.2) к приведенной форме достаточно найти выражения для  $p_t$  и  $Y_t^d$ :

$$\begin{cases} p_t = \frac{b_0 - a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_t + \frac{b_1}{a_1} p_{t-1} \\ Y_t^d = b_0 + b_1 p_{t-1} \\ Y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} \end{cases} \quad (2.3)$$

Зная значения параметров модели и значение цены на товар в предшествующем периоде, можно дать прогноз равновесной цены и уровней спроса и предложения в текущем периоде времени

# Фиктивные переменные

В экономике часто встречаются такие факторы , которые носят качественный характер

**Например.** Уровень образования («начальное», «среднее», «высшее», «незаконченное высшее»)  
Для использования таких факторов в моделях применяются «фиктивные» переменные

**Определение.** Фиктивной переменной модели называют переменную, которая вводится для учета качественных факторов и принимающая дискретные числовые значения

Фиктивные переменные участвуют в моделях одновременно с другими типами переменных

Они так же могут быть отнесены к определенному моменту времени

# Фиктивные переменные

**Например.** Пусть переменная  $K$  - качество образования:

$K = 0$  – «начальное образование»,

$K = 1$  – «среднее образование»,

$K = 2$  – «незаконченное высшее образование»,

$K = 3$  – «высшее образование»

$X$  – стаж работы специалиста

$Y$  - заработная плата специалиста

Тогда спецификацию модели, связывающей уровень зарплаты специалиста с его качеством образования и стажем работы можно представить в виде:

$$Y_t = a_0 + a_1 k_t + a_2 x_t \quad k_t = 0, 1, 2, 3$$

# Общий вид структурной формы модели

Общий вид структурной формы экономической модели имеет вид:



(2.4)

Форма (2.4) называется точечной формой структурной формы экономической модели

Здесь  $a_{ij}$  – параметры, стоящие при эндогенных переменных  
 $b_{ij}$  – параметры, стоящие при predetermined переменных

$y_{it}$  – эндогенные переменные

$x_{jt}$  – predetermined переменные

# Общий вид структурной формы модели

В канонической (матричной форме) модель имеет вид:

$$A\overset{\text{в}}{Y} + B\overset{\text{в}}{X} = 0 \quad (2.5)$$

где:  $A$  – матрица коэффициентов при эндогенных переменных;

$Y$  – вектор-столбец эндогенных переменных;

$B$  – матрица коэффициентов при predetermined переменных;

$X$  – вектор столбец predetermined переменных

**Замечание.** В эконометрике всегда будем исходный вектор понимать как **вектор-столбец!**

# Общий вид структурной формы модели

Общий вид приведенной формы экономической модели:

$$\bar{Y} = M\bar{X} \quad (2.6)$$

Переход из структурной к приведенной форме модели в общем виде осуществляется:

$$M = -A^{-1}B \quad (2.7)$$

где:  $A^{-1}$  – матрица обратная матрице  $A$

$A$ ,  $B$  – матрицы коэффициентов структурной формы экономической модели

# Спецификация моделей

**Пример.** Записать модель конкурентного рынка (2.2) в приведенной форме

$$\begin{cases} Y_t^d = a_0 + a_1 p_t + a_2 x_t \\ Y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} \\ Y_t^d = Y_t^s \\ a_1 < 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

1. Выписываем необходимые вектора и матрицы для модели (2.2)

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_t^d \\ Y_t^s \\ p_t \end{pmatrix}; \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & -a_2 \\ -b_0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Спецификация моделей

2. Вычисляем матрицу  $M$

Для этого находится обратная матрица  $A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 \\ 0 & a_1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Тогда матрица  $M$  есть:

$$M = -\frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_1 \\ 0 & a_1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_0 & -a_2 & 0 \\ -b_0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} -a_1 b_0 & 0 & a_1 b_1 \\ -a_1 b_0 & 0 & a_1 b_1 \\ (a_0 - b_0) & a_2 & -b_1 \end{pmatrix}$$

3. Приведенная форма модели принимает вид:

$$\vec{Y} = -\frac{1}{a_1} \begin{pmatrix} -a_1 b_0 & 0 & a_1 b_1 \\ -a_1 b_0 & 0 & a_1 b_1 \\ (a_0 - b_0) & a_2 & -b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix} \quad \left. \begin{aligned} p_t &= \frac{b_0 - a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} x_t + \frac{b_1}{a_1} p_{t-1} \\ Y_t^d &= b_0 + b_1 p_{t-1} \\ Y_t^s &= b_0 + b_1 p_{t-1} \end{aligned} \right\}$$

# Спецификация моделей

**Замечание.** Структурная и приведенная формы модели это две различные формы записи одной модели

**Замечание.** Следует иметь в виду, что переход от структурной формы модели к приведенной возможен всегда и однозначно. Обратное не верно!

Рассмотренные модели относятся к классу экономических моделей

Их особенность в том, что они определяют однозначную связь между переменными объекта

**На практике это не так!**

# Эконометрические модели

| №  | Доход<br>Долл<br>DPI | Потреб<br>Долл<br>CONS | №  | Доход<br>Долл<br>DPI | Потреб<br>Долл<br>CONS |
|----|----------------------|------------------------|----|----------------------|------------------------|
| 1  | 2508                 | 2406                   | 11 | 2432                 | 2311                   |
| 2  | 2572                 | 2564                   | 12 | 2354                 | 2278                   |
| 3  | 2408                 | 2336                   | 13 | 2404                 | 2240                   |
| 4  | 2522                 | 2281                   | 14 | 2381                 | 2183                   |
| 5  | 2700                 | 2641                   | 15 | 2581                 | 2408                   |
| 6  | 2531                 | 2385                   | 16 | 2529                 | 2379                   |
| 7  | 2390                 | 2297                   | 17 | 2562                 | 2378                   |
| 8  | 2595                 | 2416                   | 18 | 2624                 | 2554                   |
| 9  | 2524                 | 2460                   | 19 | 2407                 | 2232                   |
| 10 | 2685                 | 2549                   | 20 | 2448                 | 2356                   |

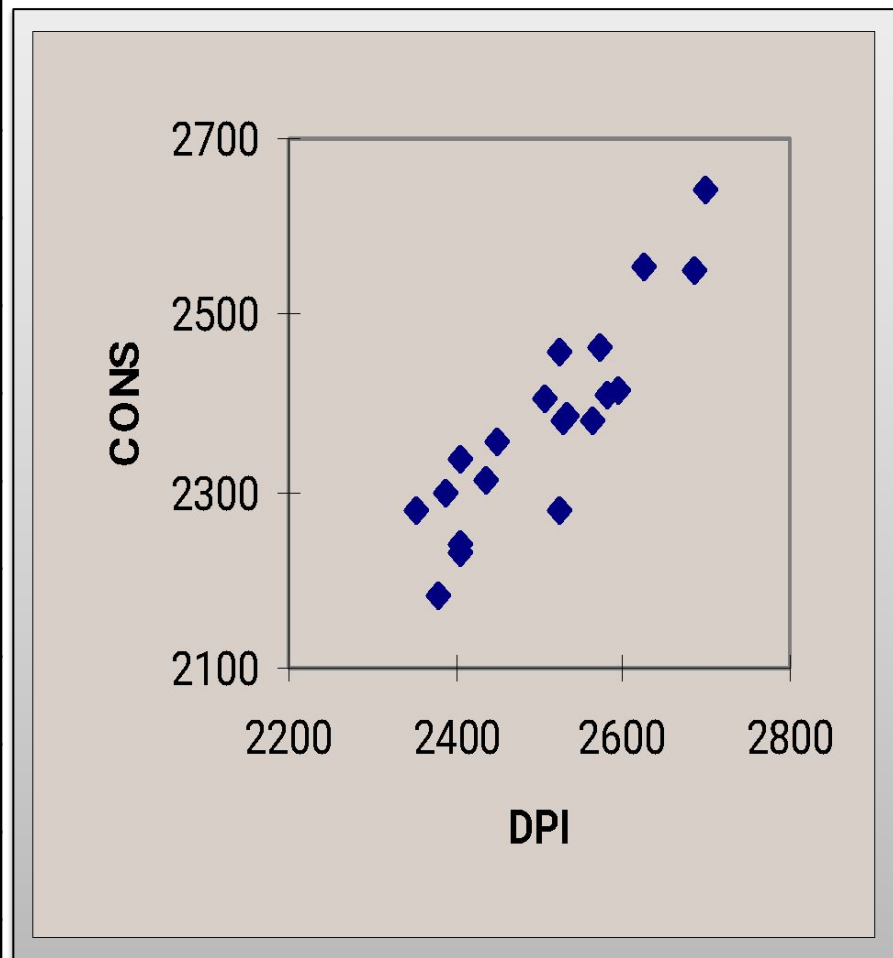


Диаграмма рассеяния

# Эконометрические модели

Причина неоднозначной связи между располагаемым доходом и расходами:

1. Индивидуальные особенности домашних хозяйств
2. Влияние неучтенных факторов

## Выводы:

Невозможно построить модель вида  $Y=f(x)$ , с помощью которой можно однозначно определить связь между расходами и доходами домашних хозяйств

Зависимость между доходами и расходами домашних хозяйств носит случайный характер

# Эконометрические модели

Для учета случайного характера экономических процессов, модель записывают в виде:

$$Y = f(X) + \varepsilon \quad (2.8)$$

где:  $Y$  – эндогенная переменная;

$X$  – вектор predetermined переменных

$f(X)$  – детерминированная математическая функция, определяющая закономерность между эндогенной и predetermined переменными

$\varepsilon$  – случайная величина, учитывающая влияние неучтенных факторов и индивидуальные особенности конкретного объекта

Модель (2.8) называют эконометрической моделью  
Правая часть (2.8) называется обобщенной функциональной или регрессионной зависимостью

# Эконометрические модели

Функцию  $f(X)$  называют уравнением регрессии.

Элементы вектора  $X$  называют **регрессорами**

$\varepsilon$  – случайное возмущение или центрированный остаток

Будем полагать, что среднее значение  $\varepsilon=0$ ,  
дисперсия  $\varepsilon$  постоянна во всем диапазоне изменения  
регрессоров

В этом случае  $f(X)$  функция изменения **среднего значения**  $Y$

# Эконометрические модели

Пример эконометрической модели:

Паутинная модель конкурентного рынка

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t^d = a_0 + a_1 p_t + a_2 x_t + u_t \\ Y_t^s = b_0 + b_1 p_{t-1} + v_t \\ Y_t^d = Y_t^s \\ M(u_t | \mathbf{x}) = 0 \\ \sigma^2(u_t | \mathbf{x}) = \sigma_u \\ M(v_t | \mathbf{x}) = 0 \\ \sigma^2(v_t | \mathbf{x}) = \sigma_v \\ a_0, b_0, b_1 \geq 0; \quad a_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

**Замечание.** Случайные возмущения присутствуют только в поведенческих уравнениях эконометрической модели  
В уравнениях тождествах они отсутствуют

# Эконометрические модели

Общий вид эконометрической модели имеет вид:

$$\overset{\text{м}}{A} \overset{\text{м}}{Y} + \overset{\text{м}}{B} \overset{\text{м}}{X} = \overset{\text{м}}{U} \quad (2.9)$$

где  $U$  – вектор-столбец случайных возмущений модели

Случайные возмущения сохраняются в приведенной форме модели. Их вычисление производится по формуле:

$$V = A^{-1}U$$

**Замечание.** Необходимость учета в моделях влияние случайных возмущений является **четвертым принципом спецификации** эконометрических моделей

# Эконометрические модели

**Задача.** Специфицировать эконометрическую модель макроэкономики Кейнса закрытой национальной экономики без государственного вмешательства в структурной и приведенной формах

**Известно:** Экономический объект описывается следующими количественными переменными:  $(Y, C, S, I)$ , где  $Y$ - уровень совокупного выпуска,  $C$  – объем потребления,  $S$ - уровень сбережений,  $I$ - объем инвестиций

Экономическая теория утверждает:

1. Объем потребления в текущем периоде объясняется уровнем текущего совокупного выпуска, возрастает с его ростом, но рост потребления не превосходит выпуска
2. Суммарная величина текущего выпуска и текущих сбережений совпадает с суммой текущих потреблений и инвестиций
3. Уровень сбережений в текущем периоде равен объему инвестиций в прошедшем периоде

# Эконометрические модели

## Решение.

1. Определяем вектора эндогенных и предопределенных переменных:

$$\vec{Y} = (C_t, S_t)^T \quad \vec{X} = (1, Y_t, I_t, I_{t-1})^T$$

2. Записываем спецификацию каждого уравнения модели:

$$C_t = a_0 + a_1 Y_t + u_t$$

$$C_t + I_t = S_t + Y_t$$

$$S_t = I_{t-1}$$

$$0 \leq a_1 \leq 1$$

В результате получена структурная форма макромоделли Кейнса в виде системы одновременных уравнений

3. Формируем матрицы A и B, а также вектор U

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} U_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Эконометрические модели

## 4. Формирование матрицы $A^{-1}$

### 4.1 Вычисление определителя матрицы $A$

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = -a_1 + 1 = (1 - a_1)$$

### 4.2 Вычисление элементов матрицы алгебраических дополнений

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad d_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \quad d_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad d_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -a_1 \quad d_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1$$

$$d_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad d_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad d_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - a_1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -a_1 & 0 \\ -1 & a_1 & 1 - a_1 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 - a_1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{1 - a_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 - a_1 \end{pmatrix}$$

# Эконометрические модели

5. Формирование приведенного вектора случайных возмущений

$$\begin{aligned} \boxed{\varepsilon} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} & \boxed{\varepsilon} &= \frac{1}{1-a_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1-a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a_1} \begin{pmatrix} u_t \\ u_t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Формирование матрицы  $\mathbf{M}$

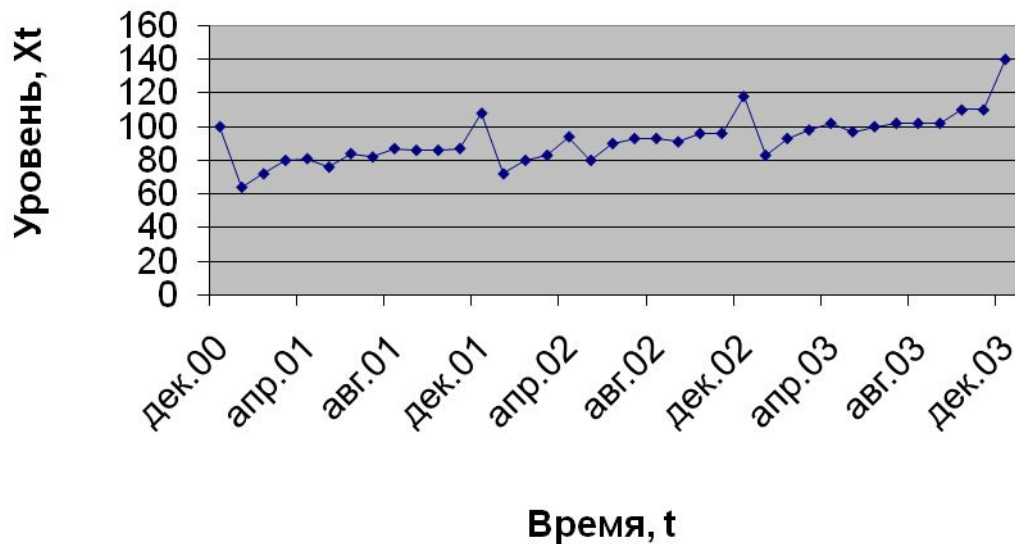
$$\mathbf{M} = \frac{-1}{1-a_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1-a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{1-a_1} \begin{pmatrix} -a_0 & -1 & -1 \\ -a_0 & -a_1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1-a_1 \end{pmatrix}$$

7. Приведенная форма модели принимает вид:

$$\boxed{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1-a_1} \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -(1-a_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{I}_t \\ \mathbf{I}_{t-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-a_1} \begin{pmatrix} u_t \\ u_t \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Спецификация моделей временных рядов

Уровни реального располагаемого денежного душевого дохода в России,  $Y_t$ , в % к декабрю 2000г.



Временным рядом называют такую экономическую модель, в которой эндогенная переменная  $Y_t$  является функцией целочисленного аргумента  $t$

# ■ Спецификация моделей временных рядов

В общем виде спецификации моделей в виде временных рядов можно представить так:

$$Y_t = T_t + S_t + u_t \quad (2.10)$$

$$Y_t = T_t \cdot S_t + u_t \quad (2.11)$$

Модель (2.10) называют аддитивной, а (2.11) мультипликативной

В моделях функция  $T_t$  отражает влияние факторов, оказывающих «вековые» (лежащие за пределами изучения) влияние на эндогенную переменную. Направление их влияния не изменяется в течении изучаемого отрезка времени. Ее называют **временным трендом**.  
Функция  $S_t$  учитывает влияние факторов, которые оказывают циклическое влияние на эндогенную переменную в изучаемый отрезок времени

$U_t$  отражает влияние случайных факторов, которые с большой скоростью меняют направление и интенсивность влияния

# ■ Спецификация моделей временных рядов

Примеры наиболее часто используемых функций в спецификациях временных рядов

**Тренды:**

$$T_t = a_0 + a_1 t$$

$$T_t = a_0 \cdot t^{a_1}$$

$$T_t = a_0 + a_1 \ln(t_0 + t)$$

$$T_t = a_0 \exp(a_1 t)$$

$$T_t = a_0 \exp(-t^{a_1})$$

**Циклические функции:**

$$S_t = \alpha + \beta \cdot \sin(2\pi \cdot t/p) + \gamma \cdot \cos(2\pi \cdot t/p) \quad (2.12)$$

где:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – параметры модели;

$p$  – период тригонометрических функций;

$a = (\beta^2 + \gamma^2)^{1/2}$  – амплитуда колебаний.

Функция (2.10) называется первой гармоникой.

В общем случае используется отрезок ряда Фурье:

$$S_t = \alpha + \sum_{i=1}^m \{ \beta_i \cdot \sin(i \cdot 2\pi \cdot t/p) + \gamma_i \cdot \cos(i \cdot 2\pi \cdot t/p) \} \quad (2.13)$$

# Эконометрические модели

Выводы:

1. Экономические модели носят стохастический (вероятностный) характер
2. С их помощью возможно учесть неоднозначность поведения экономических объектов
3. Модели могут быть представлены в двух формах: структурной и приведенной
4. Для построения эконометрических моделей используется аппарат математической статистики