

§19. Логарифмический вычет.

Пусть $f(z) \in C^\infty(\bar{g} \setminus \{z_1, \dots, z_M\})$

z_p - полюса, $f(\xi)|_{\xi \in \partial g} \neq 0$

Тогда $\forall \xi \in \partial g$ – правильная и

$\exists f(\xi)|_{\xi \in \partial g}$

Определение. Функция

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

называется *логарифмической производной* функции $f(z)$.

$\text{Выч}[\phi(z), z_k]$ называются *логарифмическими вычетами*

$z_k : z_n$ - нули $f(z)$ и z_3 - полюса $f(z)$.

$$\text{Выч}[\phi(z), z_k] = ?$$

1) z_n — нуль порядка n

$$f(z) = (z - z_n)^n f_1(z), \quad f_1(z_n) \neq 0.$$

$$\varphi(z) = \frac{n}{(z - z_n)} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$$\text{Выч}[\varphi(z), z_n] = n$$

2) z_p — полюс порядка p

$$f(z) = \frac{f_2(z)}{(z - z_p)^p}, \quad f_2(z_p) \neq 0.$$

$$\varphi(z) = \frac{-p}{(z - z_p)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)}$$

$$\text{Выч}[\varphi(z), z_p] = -p$$

Теорема 19.1 Если $f(z) \in C^\infty(\bar{g} \setminus \{z_1, \dots, z_M\})$

z_p - полюса, $f(\xi)|_{\xi \in \partial g} \neq 0$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = N - P,$$

где N - полное число нулей $f(z)$ с учетом кратности, P - полное число полюсов $f(z)$ с учетом кратности.

Доказательство. По основной теореме теории вычетов

$$\begin{aligned} \int_{\partial g^+} \varphi(\xi) d\xi &= 2\pi i \sum_{k=1}^M \text{Выч}[\varphi(z), z_k] = \\ &= 2\pi i \left[\sum_{k=1}^N n_k - \sum_{k=1}^P n_p \right] = 2\pi i (N - P) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

В частности, если $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

Принцип аргумента.

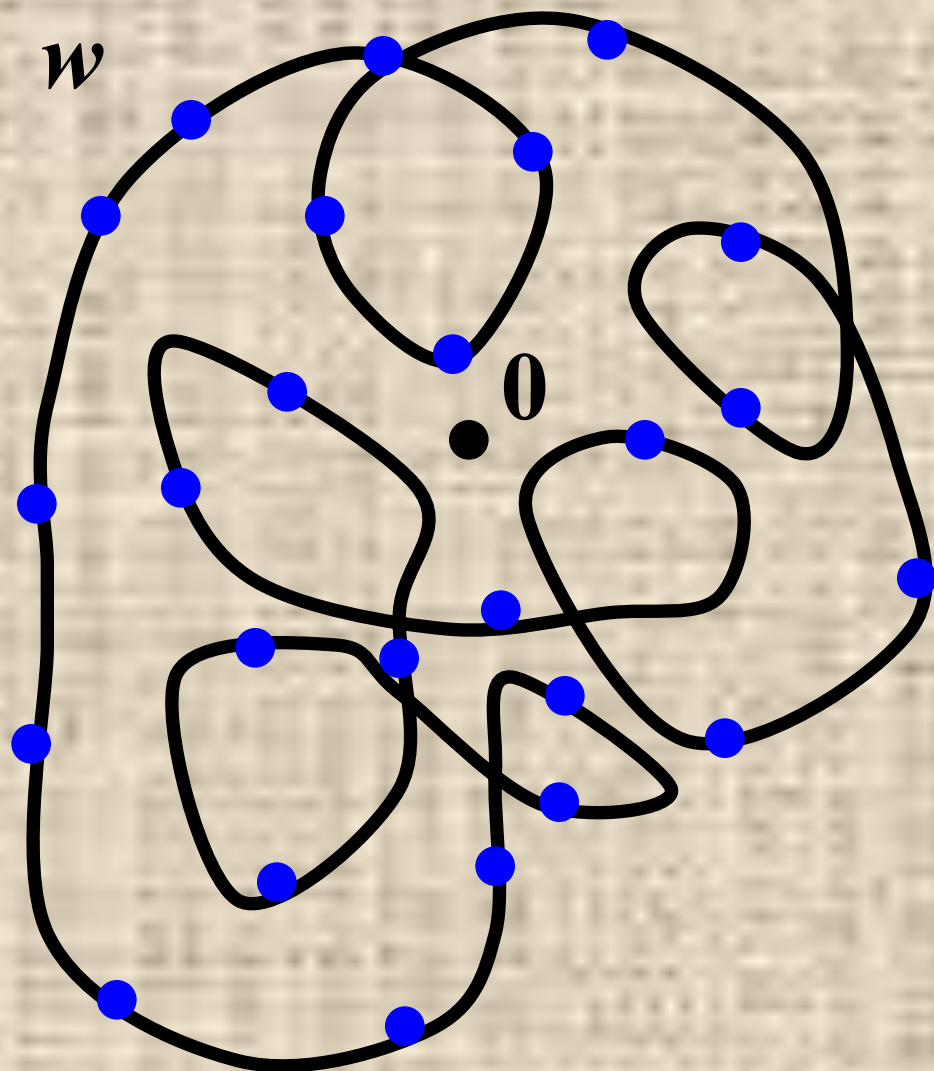
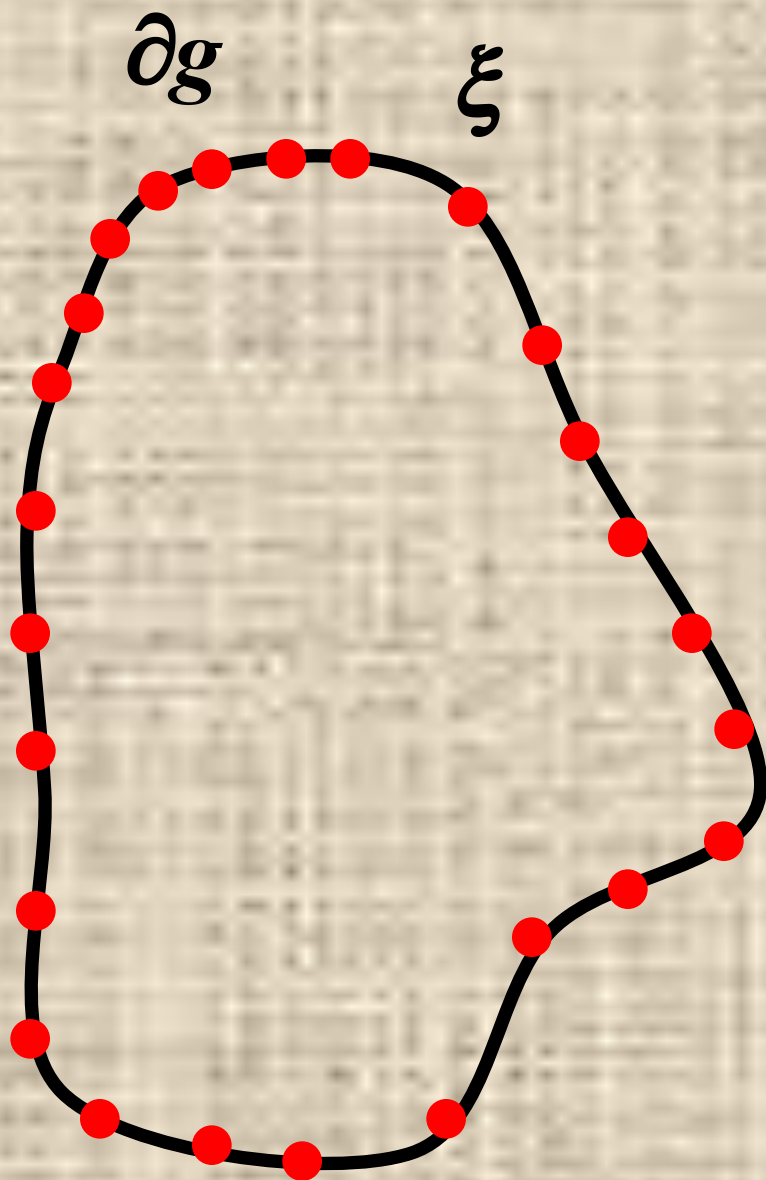
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} d \ln f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g^+} d \ln |f(\xi)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial g^+} d \arg f(\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{Var}[\ln |f(\xi)|]_{\partial g^+} + \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg f(\xi)]_{\partial g^+}\end{aligned}$$

$\ln|f(\xi)|$ действительная, однозначная

$$\Rightarrow \text{Var}[\ln|f(\xi)|]_{\partial g^+} = 0.$$

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg f(\xi)]_{\partial g^+}$$

Геометрическая интерпретация



Принцип аргумента. Разность между полным числом нулей и полюсов функции $f(z)$ в области g определяется *числом оборотов*, которое совершает точка $w=f(z)$ вокруг точки $w=0$, при *положительном* обходе точкой z контура ∂g .

Теорема Руше

Если $f(z), \varphi(z) \in C^\infty(\overline{g})$

$\|f(z)\|_{\partial g} > \|\varphi(z)\|_{\partial g}$, то $N[f + \varphi]_g = N[f]_g$

Доказательство. $f(z) \in C^\infty(\overline{g})$

$\Rightarrow f(z)|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$$\|f(z)\|_{\partial g} > \|\varphi(z)\|_{\partial g} \Rightarrow \|f(z)\|_{\partial g} \neq 0.$$

$$F(z) \equiv f(z) + \varphi(z) \in C^\infty(\overline{g})$$

$\Rightarrow F(z)|_{\partial g}$ не имеет особых точек.

$$\|F(z)\|_{\partial g} = \|f(z) + \varphi(z)\|_{\partial g} \geq \|f(z)\|_{\partial g} - \|\varphi(z)\|_{\partial g} > 0$$

$$\Rightarrow f(z), \quad F(z) = f(z) + \varphi(z) \in T.19.1$$

$$\Rightarrow N[f + \varphi]_g = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg(f + \varphi)]_{\partial g}$$

$$N[f]_g = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg(f)]_{\partial g}$$

$$N[f + \varphi]_g - N[f]_g =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg(f + \varphi) - \arg(f)]_{\partial g} = (*)$$

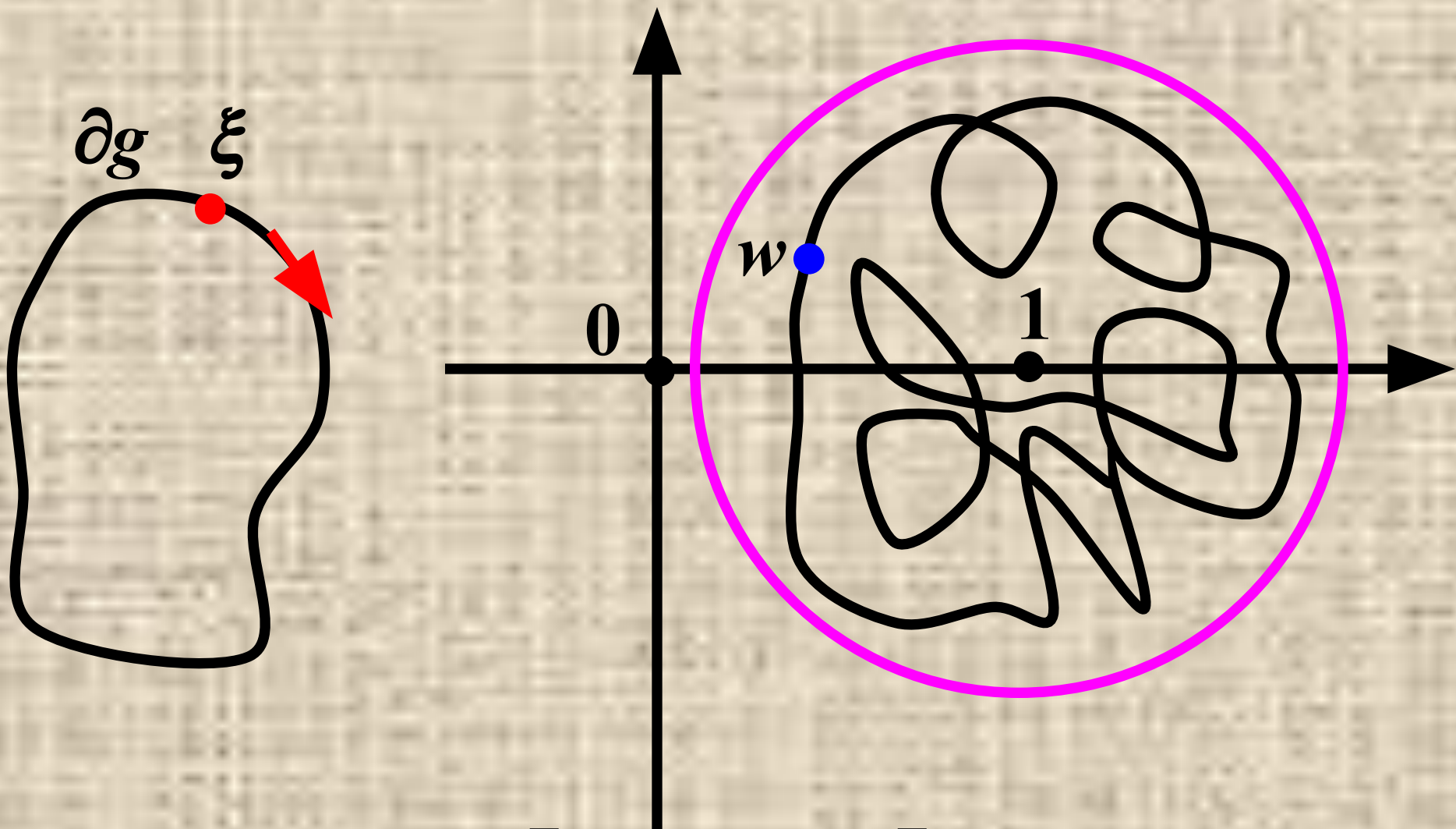
$$z_1 = |z_1|e^{i\arg(z_1)}, \quad z_2 = |z_2|e^{i\arg(z_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\arg(z_1)-\arg(z_2))} \Rightarrow$$

$$\arg(z_1)-\arg(z_2)=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \frac{1}{2\pi} \text{Var} \left[\arg \left(\frac{f + \varphi}{f} \right) \right]_{\partial g} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \text{Var} \left[\arg \left(1 + \frac{\varphi}{f} \right) \right]_{\partial g}
 \end{aligned}$$

$$w = 1 + \frac{\varphi}{f} \quad w - 1 = \frac{\varphi}{f} \Rightarrow \quad |w - 1| = \frac{|\varphi|}{|f|} \leq \rho < 1$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{Var} \left[\arg \left(1 + \frac{\varphi}{f} \right) \right]_{\partial g} = 0 \quad \blacksquare$$

Основная теорема высшей алгебры.

Полином n -ой степени имеет *на комплексной плоскости* ровно n нулей (с учетом их кратности).

Доказательство.

$$\begin{aligned} F(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \\ &= f(z) + \varphi(z) \end{aligned}$$

$$f(z) = a_n z^n \qquad \varphi(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n}$$

$$\forall a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \quad \exists R_0 : \forall |z| = R > R_0$$

$$0 < \left| \frac{f(z)}{\varphi(z)} \right|_{|z|=R} < 1 \Rightarrow m. \text{Pyше}$$

$$N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R}$$

$$f(z) = a_n z^n \quad z=0 - \text{корень кр. } n$$

$$\Rightarrow N[F]_{|z|=R} = N[f]_{|z|=R} = n \quad \blacksquare$$