Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 11 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.
БИНОМ НЬЮТОНА.

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Треугольник Паскаля.

.

Числа C_n^k имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение.

Такая запись называется **треугольником Паскаля**:

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$

$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Треугольник Паскаля.

Правило записи треугольника легко запомнить:

Каждое число в треугольнике паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке.

Давайте распишем несколько строк:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Математически свойство подсчета числа сочетаний без повторений можно записать еще вот так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Бином Ньютона.

Как оказалось треугольника Паскаля находит свое применение и в другой математической задаче. Давайте вспомним несколько правил возведения в квадрат суммы.

Самое первое правило, которое мы с вами выучили это квадрат суммы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Довольно таки легко найти выражение и для следующей степени, используя правила перемножения многочленов:

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Проделаем эту же операцию и для четвертой степени:

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Бином Ньютона.

Выпишем для наглядности все наши формулы:

$$(a+b)^1 = a + b;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Давайте проведем небольшой анализ полученных формул.

Первое на что стоит обратить внимание, **показатель степени в левой части равен сумме показателей степеней в правой части**, для любого слагаемого. Для четвертой степени, очевидно слева показатель равен четырем. В правой части показатель степени, при первом слагаемом, для a равен 4, для b равен 0, в сумме 4. Для второго слагаемого сумма показателей равна 3+1=4, для следующего 2+2=4, и так до самого конца сумма показателей равна 4.

Ребята, **посмотрите внимательно на коэффициенты в правой части**, ни чего не напоминает? Правильно, **коэффициенты образуют треугольник Паскаля**.

Бином Ньютона.

Эти два замечательных свойства, замеченных выше, позволяют вычислять сумму двух одночленов в n-ой степени:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Давайте попробуем доказать нашу формулу:

Рассмотрим слагаемое, стоящее на месте под номером k+1. По написанной выше формуле получаем, вот такое слагаемое: $C_n^k a^{n-k} b^k$

Нам нужно доказать, что коэффициент при данном одночлене как раз и равен . C_n^k

Для того, чтобы двучлен возвести в n-vю степень. нам нvжно этот двvчлен умножить на себя n раз, то есть: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdot \ldots \cdot (a+b)}_{\textbf{n штук}}$

Чтобы получить требуемое слагаемое, нам надо выбрать k - штук множителей для b, и получается n-k – множителей для a, в каком порядке будем выбирать данные множители не важно, а это задача есть ни что иное как – число сочетаний из n элементов по к, без повторений, то есть C_n^k. Наша формула доказана.

Бином Ньютона.

Полученная нами формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

коэффициенты.

Бином Ньютона.

Пример. Раскрыть скобки: а) $(y+1)^7$ $(z^2-3t)^5$

Решение. Применим нашу формулу:

а) $(y+1)^7 = C_7^0 y^7 + C_7^1 \cdot y^6 \cdot 1 + C_7^2 \cdot y^5 \cdot 1^2 + C_7^3 \cdot y^4 \cdot 1^3 + C_7^4 \cdot y^3 \cdot 1^4 +$
$+ C_7^5 \cdot y^2 \cdot 1^5 + C_7^6 \cdot y \cdot 1^6 + C_7^7 \cdot 1^7$

Вычислим все коэффициенты:

$$C_7^0 = 1; C_7^1 = 7;\ C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21;\ C_7^3 = 35;\ C_7^4 = 35; C_7^5 = 21;\ C_7^6 = 7; C_7^7 = 1$$

В итоге получаем:

$$(y+1)^7 = y^7 + 7 \cdot y^6 + 21 \cdot y^5 + 35 \cdot y^4 + 35 \cdot y^3 + 21 \cdot y^2 + 7 \cdot y + 1$$

б) $(z^2-3t)^5 = C_5^0 \cdot (z^2)^5 + C_5^1 \cdot (z^2)^4 \cdot (-3t)^1 + C_5^2 \cdot (z^2)^3 \cdot (-3t)^2 +$

$$+ C_5^3 \cdot (z^2)^2 \cdot (-3t)^3 + C_5^4 \cdot (z^2)^1 \cdot (-3t)^4 + C_5^5 \cdot (z^2)^0 \cdot (-3t)^5 =$$

$$= z^{10} + 5 \cdot z^8 \cdot (-3t) + 10 \cdot z^6 \cdot (9t^2) + 10 \cdot z^4 \cdot (-27t^3) + 5 \cdot z^2 \cdot (81t^4) - 243t^5$$

$$= z^{10} - 15z^8t + 90z^6t^2 - 270z^4t^3 + 405z^2t^4 - 243t^5$$

Бином Ньютона.

Обратим вниманием на еще одно удивительное свойство. Рассмотрим двучлен:

Используя Бином Ньюто $(x + 1)^n$:

При

$$(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n$$

Бином Ньютона

Задачи для самостоятельного решения.

Избавиться от скобок:

а) $(x+2)^6$

б) $(3x+2y)^4$

в) $(2z-2t)^8$

г) $(x-4y)^5$