

**СКАЛЯРНЫЕ И
ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ.
ГРАДИЕНТ.
ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ
ПОЛЯ.**

Если в каждой точке M заданной области пространства (чаще всего размерности 2 или 3) поставлено в соответствии некоторое (обычно действительное) число u , то говорят, что в этой области задано *скалярное поле*

$$M \ni (x, y, z) \rightarrow u(x, y, z)$$

Примеры скалярных полей на трёхмерном пространстве:

- поле температуры внутри тела
(подразумевается, что она, вообще говоря, разная в разных точках тела);
- поле потенциала φ электрического заряда ;
- поле давления в жидкой среде.

Примеры плоских (двумерных) скалярных полей:

- глубина моря, отмеченная каким-либо образом на плоской карте;
- плотность заряда на плоской поверхности проводника.

Скалярное поле можно представить графически с помощью **поверхностей уровня** (также называемой **изоповерхностями**).

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек пространства, в которых функция u принимает одно и то же значение C , то есть поверхность уровня определяется уравнением .

$$u(x, y, z) =$$

Важнейшей характеристикой скалярного поля является градиент (grad):

Градиентом дифференцируемого скалярного поля $u(x, y, z)$ называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

Физический смысл градиента

Вектор $\text{grad } u$ указывает направление наиболее быстрого роста функции $u(\mathbf{r})$, а его величина $|\text{grad } u|$ дает скорость этого роста.

Если в каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определен вектор

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

то говорят, что в области задано векторное поле

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$$

Примерами векторного поля являются
поля скорости и ускорения в текущей жидкости
или газе, поле силы гравитации, поле
интенсивности электростатического поля и тому
подобные.

Вообще, примером векторного поля может
служить поле сил любой природы.

Важнейшими характеристиками векторного поля являются дивергенция (div) и ротор (rot)

Дивергенцией (или расходимостью)

дифференцируемого векторного поля

$\nabla a(M) = (P, Q, R)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Если $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) > 0$, то т. M_0 называется источником.

Если $\operatorname{div} \vec{a}(M_0) < 0$, то т. M_0 называется стоком.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю называется соленоидальным (то есть не имеет ни источников, ни стоков).

Ротором (или вихрем) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Если для всех точек поля ротор равен нулю, то такое поле называется **потенциальным** (безвихревым).

Векторное поле называется **гармоническим**, если во всех точках поля

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$$

ПРОСТЕЙШИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

К простейшим векторным полям относятся :

- соленоидальное;
- потенциальное;
- гармоническое .

Производная по направлению

Пусть функция $u(M) = u(x, y, z)$ определена в некоторой области пространства V .

Из заданной точки $M(x, y, z)$ проведем вектор s . На луче, задаваемом вектором s и точкой $M(x, y, z)$, отметим точку $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Расстояние между точками обозначим через Δs . Поэтому

$$\Delta s = \overline{MM'} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Тогда при переходе из M в M' функция $u(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$$

Производная по направлению

Если существует предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$, когда

$\Delta s \rightarrow 0$, то он называется *производной по направлению* функции $u(x, y, z)$ в точке M *по направлению вектора* $\vec{s}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

Теорема. Если функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в области V , то ее производная по любому направлению $\vec{s}$ существует в каждой точке области и равна

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, т.е. координаты единичного вектора s_0 направления

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = s_0$$

Спасибо
за
внимание!