

Применение определенного интеграла к решению физических задач: вычисление пути, пройденного телом при прямолинейном движении, вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении.

Физические приложения определенного интеграла

- А) Вычисление работы движущегося тела
- Б) Вычисление перемещения движущегося тела
- В) Вычисление массы тела
- Г) Вычисление электрического заряда в проводнике с током

Схема решения физических задач с использованием определенного интеграла

- А) выбрать формулу классической физики, соответствующую условию задачи,
- Б) найти дифференциал искомой величины на основании этой формулы,
- В) установить промежуток интегрирования,
- Г) вычислить интеграл, т.е. найти искомую величину.

Величины	Соотношение в дифференциалах	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа F – сила N – мощность	$dA = F(x)dx$ $dA = N(t)dt$	$F(x) = \frac{dA}{dx}$ $N(t) = \frac{dA}{dt}$	$A = \int_x^x F(x)dx$ $A = \int_t^t N(t)dt$
m – масса тонкого стержня ρ – линейная плотность	$dm = \rho(x)dx$	$\rho(x) = \frac{dm}{dx}$	$m = \int_x^x \rho(x)dx$
q –электрический заряд I – сила тока	$dq = I(t)dt$	$I(t) = \frac{dq}{dt}$	$q = \int_t^t I(t)dt$
s – перемещение v – скорость	$ds = v(t)dt$	$v(t) = \frac{ds}{dt}$	$s = \int_t^t v(t)dt$
Q – количество теплоты c – теплоемкость	$dQ = c(t)dt$	$c(t) = \frac{dQ}{dt}$	$Q = \int_t^t c(t)dt$

1. Схема решения задач на приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи физики, механики и т. д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Так, понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, давление и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через X , а промежуток ее изменения — через $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины. Этого можно добиться при увеличении числа разбиений отрезка.

На каждой такой части задачу решают по формулам для постоянных величин.

Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находят искомую

вел

$I = \int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ — данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

2. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t , вычисляется по формуле $S = vt$.

Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t , т. е. $v = f(t)$, то для нахождения пути, пройденного телом за время от t_1 до t_2 , разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt . В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приблизительно равен сумме:

$$S \approx \sum_{k=1}^n v(t_k) \Delta t.$$

Если функция $v(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v(t_k) \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Итак,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

3. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s , а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения a в положение b .

Если сила F постоянна, то работа находится по формуле $A = F(b - a)$ (произведение силы на длину пути).

Пусть на тело, движущееся по прямой Ox , действует сила F , которая изменяется в зависимости от пройденного пути, т. е. $F = f(x)$. Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от a до b , разделим этот отрезок на n равных частей Δx . Предположим, что на каждой части Δx сила сохраняет постоянное значение $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_k), \dots, F(x_n)$.

Составим интегральную сумму, которая приближенно равна значению произведенной работы:

$$A \approx F(x_1)\Delta x + F(x_2)\Delta x + \dots + F(x_k)\Delta x + \dots + F(x_n)\Delta x,$$

т.е. работа, совершенная этой силой на участке от a до b , приближенно мала сумме

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k.$$

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

4.Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины

Согласно закону Гука, сила F , необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть x – величина растяжения или сжатия пружины. Тогда $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Работа на участке Δx выразится формулой $\Delta A \approx F \Delta x$, а вся затраченная работа $A \approx \sum_{x_0}^{x_1} F \Delta x$ или $A \approx \sum_{x_0}^{x_1} kx \Delta x$. Если $\Delta x \rightarrow 0$, то погрешность величины работы стремится к нулю.

Для нахождения истинной величины работы следует перейти к пределу

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_0}^{x_1} f \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_0}^{x_1} kx \Delta x = \int_{x_0}^{x_1} kx dx.$$

Итак,

$$A = k \int_{x_0}^{x_1} x dx.$$

5.Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S , глубина погружения которой равна h , определяется по формуле

$$P = 9,81\gamma hS \quad (4), \text{ где } \gamma - \text{плотность жидкости.}$$

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a , а нижний — на глубину b .

Так как различные части вертикальной пластинки находятся на разной глубине, то сила давления жидкости на них неодинакова. Для вывода формулы нужно разделить пластинку на n горизонтальных полос одинаковой высоты Δx . Каждую полосу приближенно можно считать прямоугольником.

По закону Паскаля сила давления жидкости на такую полосу равна силе движения жидкости на горизонтально расположенную пластинку той же площади, погруженной на ту же глубину.

Тогда согласно формуле (4) сила давления на полосу, находящуюся на расстоянии x от поверхности, составит

$$\Delta P = 9,81\gamma xy\Delta x, \text{ где } y\Delta x - \text{площадь полосы.}$$

Составим интегральную сумму и найдем ее предел, равный силе давления жидкости на всю пластинку:

$$P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b 9,81\gamma xy\Delta x = \int_a^b 9,81\gamma xy \, dx,$$

т.е.

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx \quad (5).$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то $a=0$ и формула (5) примет вид

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx \quad (5).$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9,81\gamma \int_a^b xy \, dx = 9,81\gamma y \int_a^b x \, dx = 9,81\gamma y \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = 9,81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Рассмотрим примеры задач по данной теме

№ 1

Скорость движения материальной точки задается формулой

$v = (4t^3 - 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4с от начала движения.

РЕШЕНИЕ:

$$s = \int_0^4 (4t^3 - 2t + 1)dt = (t^4 - t^2 + t) \Big|_0^4 \\ = 256 - 16 + 4 = 244 \text{ (м)}.$$

Ответ: 244 м

№ 2

- Скорость движения изменяется по закону $v = 2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение:

- $$s = \int_2^3 2t \, dt = t^2 \Big|_2^3 = 9 - 4 = 5 \text{ (м)}.$$

Ответ: 5 м

№ 3

- Скорость движения тела задана уравнением $v = (2t - 3t^2)$ м/с. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение:

Скорость движение тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно t ; получим $12t - 3t^2 = 0$; $3t(4 - t) = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

Следовательно,

$$s = \int_0^4 (12t - 3t^2) dt = (6t^2 - t^3) \Big|_0^4 = 6 * 4^2 - 4^3 = 32 \text{ (м)}.$$

Ответ: 32 м

№ 4

- Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = (29,4 - 9,8t)$ м/с.

Найти наибольшую высоту подъема.

Решение:

- Найдем время, в течении которого тело поднималось вверх: $29,4 - 9,8t = 0$ (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю); $t = 3$ с. Поэтому

$$s = \int_0^3 (29,4 - 9,8t) dt = 9,8 \left(3t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^3 = 44,1 \text{ (м)}.$$

Ответ: 44,1 м

№ 5

Какую работу совершает сила в 10Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение:

- По закону Гука сила F , растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т.е. $F=kx$. Используя условие, находим $k = \frac{10}{0,02} = 500 \text{ (Н/м)}$, т.е. $F=500x$.
Получаем

$$A = \int_0^{0,02} 500x \, dx = \frac{500x^2}{2} \Big|_0^{0,02} = 0,1 \text{ (Дж)}.$$

ОТВЕТ: 0,1 Дж

№ 6

Сила в 60 Н растягивает пружину на 2 см .

Первоначальная длина пружины равна 14 см . Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см ?

Решение:

Имеем $k \frac{60}{0,02} = 3000 \text{ (Н/м)}$ и, следовательно, $F=3000x$. Так как пружину требуется растянуть на $0,06 \text{ (м)}$, то

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,06} 3000x \, dx = 1500x^2 \Big|_0^{0,06} \\ &= 1500 * 0,0036 = 5,4 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 5,4 Дж

№ 7

Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Решение:

- Здесь $y=f(x)=20$, $a=0$, $b=5$ м, $\gamma = 1000$ кг/м³.

Находим

$$\begin{aligned} P &= 9810 \int_0^5 20x \, dx = 9810 * 20 \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 \\ &= 9810 * 10 * 25 = 2,45 * 10^6 \text{ (H)}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: $2.45 * 10^6$ Н

№ 8

В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

РЕШЕНИЕ:

- Здесь $y=1$, $a=0,5$, $b=2+0,5=2,5$ (м),
 $\gamma=1000 \text{ кг/м}^3$. Следовательно,

P

$$\begin{aligned} &= 9810 \int_a^b xy \, dx = 9810 \int_a^b x \, dx = 9810 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0,5}^{2,5} \\ &= 9810 \frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} = 29430 \text{ (Н)}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ: 29430 Н

№ 9

- Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением

$$v = t^2 - 8t + 3.$$

Найти уравнение движения точки.

РЕШЕНИЕ:

- Известно, что скорость прямолинейного движения тела равна производной пути s по времени t , т.е. $v = \frac{ds}{dt}$, откуда $ds = v dt$. Тогда имеем $ds = (t^2 - 8t + 3)dt$

$$\int ds = \int (t^2 - 8t + 3) dt; \quad s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 3t + C$$

Это искомое уравнение.

№ 10

- Скорость тела задана уравнением $v = 6t^2 + 1$. Найти уравнение движения, если за время $t = 3\text{ с}$ тело прошло путь $s = 60\text{ м}$.

РЕШЕНИЕ:

- Имеем $ds = v dt = (6t^2 + 1) dt$, тогда

$$s = \int (6t^2 + 1) dt = 2t^3 + t + C.$$

Подставив в найденное уравнение начальные условия $s=60$ м, $t=3$ с, получим $60 = 2 * 3^3 + 3 + C$, откуда $C=3$.

Искомое уравнение примет вид

$$s = 2t^3 + t + 3.$$

№ 11

- Тело движется со скоростью $v = 3t^2 - 1$ м/с. Найти закон движения $s(t)$, если в начальный момент тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

РЕШЕНИЕ:

• Так как $ds = v dt = (3t^3 - 1) dt$, то

$$s = \int (3t^3 - 1) dt = t^3 - t + C.$$

Из условия следует, что если $t=0$, то $s=5$ см $= 0,05$ м. подставив эти данные в полученное уравнение, имеем $s = t^3 - t + C$, откуда $0,05 = C$.

Тогда искомое уравнение примет вид

$$s = t^3 - t + 0,05.$$

№ 12

Вычислить силу давления воды на плотину, имеющую форму трапеции, у которой верхнее основание, совпадающее с поверхностью воды, имеет длину 10 м, нижнее основание 20 м, а высота 3 м.

РЕШЕНИЕ:

- $$P = 9810 \frac{(10 + 2 * 20)3^2}{6}$$
$$= 9810 * \frac{450}{6} = 735\,750 \text{ (H)}$$

ОТВЕТ: 735750 Н

№ 13

- Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Вычислить силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если его высота $0,1$ м, а радиус основания $0,04$ м. Плотность ртути равна 13600 кг/м³.

РЕШЕНИЕ:

- Вычислим площадь круглой полоски

$$\Delta S = 2\pi r dx = 0,08\pi dx.$$

Элементарная сила давления составляет

$$\Delta P = 9,81 * 136,00 * 0,08\pi dx = 10\,673\pi dx.$$

Следовательно

$$P = \int_0^{0,1} 10\,673\pi x dx = 10\,673\pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 53,37\pi \\ \approx 167,6 \text{ (H)}.$$

ОТВЕТ: 167,6 Н

Задачи для самостоятельного решения

- 1) Скорость движения тела задана уравнением $v = t^2 - t + 3$. Найти уравнение движения, если в начальный момент времени $s_0 = 3$ м.
- 2) Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь $s_0 = 5$ м, а его скорость задана уравнением $v = t^2 - 6t + 7$.
- 3) Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти уравнение движения тела, если известно, что за 3 с оно прошло 18 м.

Задачи для самостоятельного решения

4) Тело движется прямолинейно со скоростью $v = (3 + 3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.

5) Скорость движения тела изменяется по закону $v = (3t^2 + t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 4 с от начала движения.

6) Найти путь пройденный телом за 10-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $v = (t^2 + 4t - 2)$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

- 7) Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону $v = 15t - 5t^2$ м/с.
- 8) Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?
- 9) Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?
- 10) Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.

Задачи для самостоятельного решения

11). Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v(t)=t+3t^2$. (Время t измеряется в секундах, v – в метрах в секунду). Найдите зависимость изменения координаты точки, если в момент $t = 0$:

- 1) точка находилась в начале координат;
- 2) координата точки равна 1.

12). Зависимость скорости точки, движущейся прямолинейно, выражается формулой $v = \cos \pi t$. (v – скорость в метрах в секунду, t – время в секундах).

Найдите:

- 1) координату точки в момент времени $t = 1,5$, если при $t = 2$ она равна 2;
- 2) координату точки при $t = 3,5$, если в момент $t = 1$ она равнялась 1.

Задачи для самостоятельного решения

13). Имеется неоднородный стержень длины l . Какова масса куска стержня длины x , считая от начала, если линейная плотность ρ стержня выражается законом:

1) $\rho(x) = 3x - \sin 2x$, $x \in [0; l]$;

2) $\rho(x) = 2x + \cos 3x$, $x \in [0; l]$?

14).

1) Камень подброшен вертикально вверх с крыши здания высотой 20 м. Какова начальная скорость камня, если через 1 с он находился на высоте 30 м?

2) Камень подброшен вертикально вверх с крыши здания с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с.

Какова высота здания, если через 2 с после начала полета камень находился на высоте 30 м?