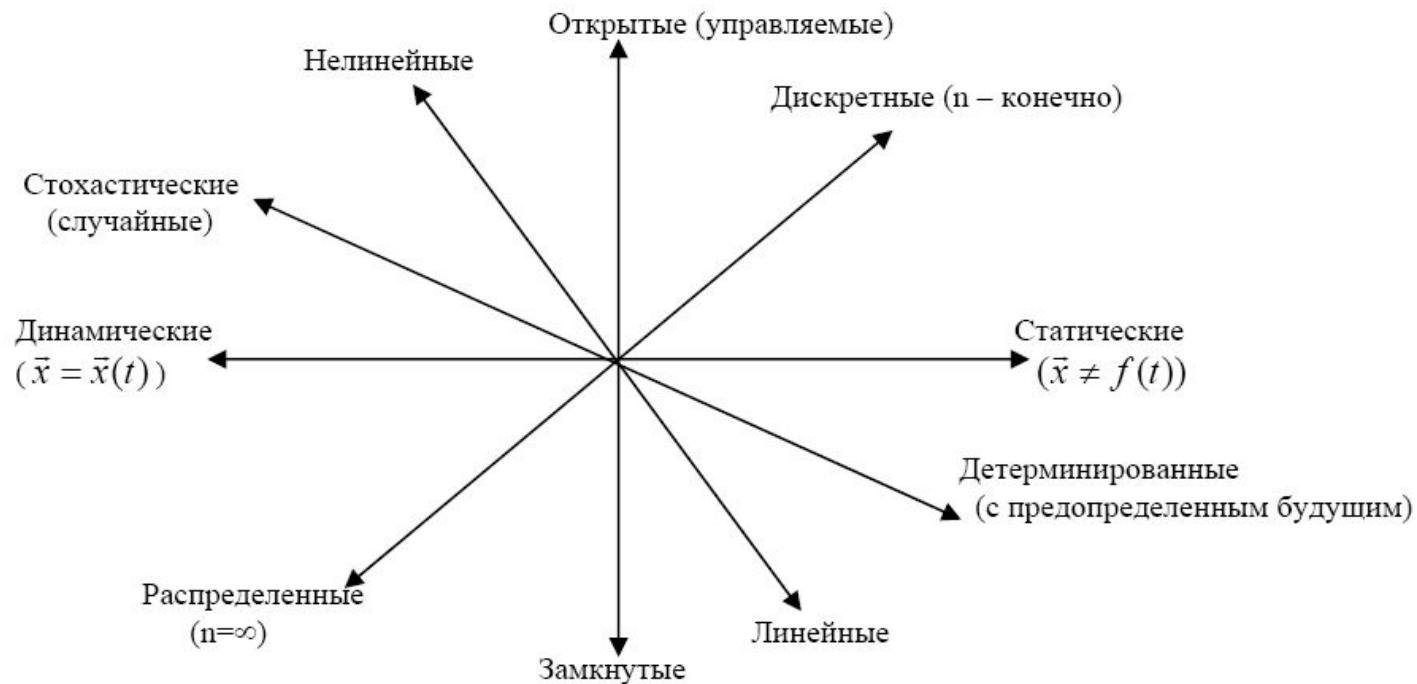


Методы математического
моделирования в электронике.
Основные понятия

Модель системы

Система – объект, состоящий из некоторого множества частей, взаимодействующих друг с другом так, что знание поведения каждой из частей ещё не позволяет сделать выводы о поведении всей системы в целом.

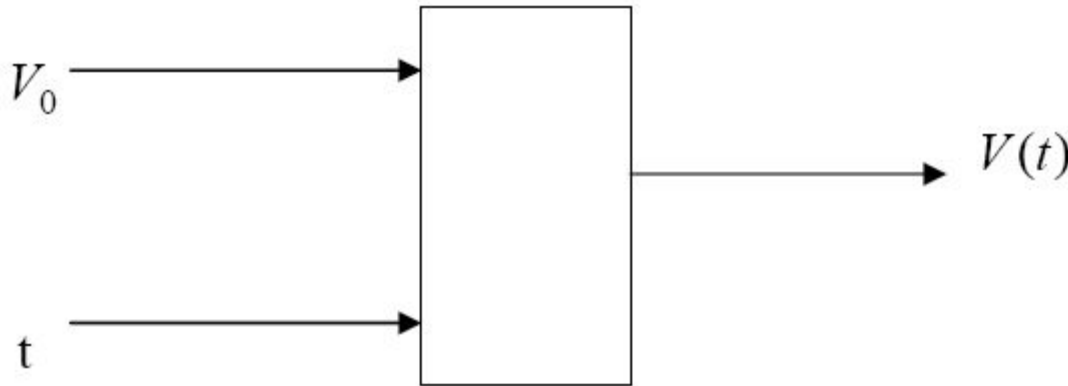
Модель (от лат. *modulus* – «мера, аналог, образец») – это упрощенное представление системы и/или протекающих в ней процессов, явлений.



Пример классификации моделей системы
(дихотомический подход)

Виды моделирования

Моделирование на стадии эксперимента происходит при выявлении зависимостей результата от наиболее существенных факторов. Это позволяет обобщить результат экспериментирования в виде некоторой *математической формулы*.



Модель "черный ящик"

Физическое моделирование в замене изучения объекта или явления его эквивалентным аналогом, имеющим схожую физическую природу (описание колебаний в LC-контуре на основе описания колебаний математического маятника).

Аналитическое моделирование – использование ряда допущений и упрощений (диффузия из бесконечного источника).

Численное моделирование – получение необходимых количественных данных о поведении систем или устройств каким-либо подходящим численным методом (методы Эйлера или Рунге-Кутты).

Основные математические модели

Вектор состояния - упорядоченный набор переменных, однозначно и без избытка описывающих состояние системы в любой момент её наблюдения

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in R^n$$

Фазовое пространство - это множество всех возможных значений вектора состояний системы

1. Модель статической замкнутой автономной системы:

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0 \quad \begin{array}{l} x - \text{вектор состояния;} \\ f(x) - \text{совокупность скалярных уравнений связей (векторная функция векторного аргумента).} \end{array}$$

2. Динамическая замкнутая автономная система

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

3. Модель динамической замкнутой системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$$

4. Модель динамической управляемой системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

Основные математические модели

5. Регулируемая динамическая система

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \\ \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}, t) \end{cases} \quad g(x, u, t) - \text{уравнение связей субъекта управления (регулятора)}.$$

6. Модель линейной динамической управляемой системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{A}(t) \cdot \vec{x} + \hat{B}(t) \cdot \vec{u}$$

7. Модель стохастической динамической системы

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \vec{f}(\vec{\xi}, t) + \vec{\eta}(t)$$

η - вектор малых случайных возмущений; $\xi(t)$ - вектор возмущённого состояния системы

Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП):

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \dots \right) = 0$$

Здесь U — зависимая переменная (функция), x_i — независимые переменные.

Порядком уравнения называется порядок старшей частной производной.

Квазилинейное уравнение — уравнение линейное относительно всех старших производных от неизвестной функции.

Линейное уравнение — уравнение линейное относительно функции и всех ее частных производных.

В теории дифференциальных уравнений, **начальные и граничные условия** - это дополнение к основному дифференциальному уравнению (обыкновенному или в частных производных), задающее его поведение в начальный момент времени или на границе рассматриваемой области соответственно.

Начальные условия

Начальные условия (НУ) — условия, определяющие значения искомой функции (и возможно, некоторых ее производных) при одном значении независимой переменной (например, в начальный момент времени, т.е. при $t = 0$).

Если в уравнении присутствует только первая производная по времени (как в уравнении теплопроводности), то достаточно задать одно начальное условие, например, распределение температуры в начальный момент.

Если же в уравнении присутствует вторая производная по времени (волновое уравнение), то необходимы два НУ, например, положение струны в начальный момент и скорость движения ее точек.

Граничные условия

Граничные условия (ГУ) — условия, определяющие значения искомой функции (и возможно, некоторых ее производных) на границе пространственной области, внутри которой ищется решение (при различных значениях независимых переменных).

ГУ бывают трех типов:

- задаются значения функции на границе — задача Дирихле,
- задаются значения производной функции по нормали к границе — задача Неймана,

-задаются условия Робена:
задача.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_G + kU_G = F$$

- смешанная граничная

Задачи математической физики описывают реальные физические процессы, а потому их постановка должна удовлетворять следующим естественным требованиям:

- решение должно существовать в каком-либо классе функций;
- решение должно быть единственным в каком-либо классе функций;
- решение должно непрерывно зависеть от данных (начальных и граничных условий, свободного члена, коэффициентов и т.д.).

Пример (моделирование процесса диффузии)

Первый закон Фика:

$$j = -D \nabla N$$

j - плотность потока атомов; D - коэффициент диффузии; оператор дифференцирования; N - концентрация атомов

Второй закон Фика:

$$\frac{dN}{dt} = D \frac{d^2 N}{dx^2}$$

Диффузия обычно проводится в два этапа: загонка и разгонка.

Двум этапам диффузионного процесса соответствует два решения уравнения Фика при различных граничных условиях:

- первый этап - диффузия с постоянной поверхностной концентрацией или диффузия из бесконечного источника;
- второй этап - диффузия из ограниченного источника.

Пример (диффузия из бесконечного источника)

Цель этапа - внедрение в полупроводник точно контролируемого количества примеси.

Начальное условие для решения второго закона Фика:

$$N(x, t)|_{t=0} \quad x > 0 = 0$$

Граничное условие:

$$N(x, t)|_{t \geq 0} \quad x = 0 = N_0$$

Решение уравнения Фика:

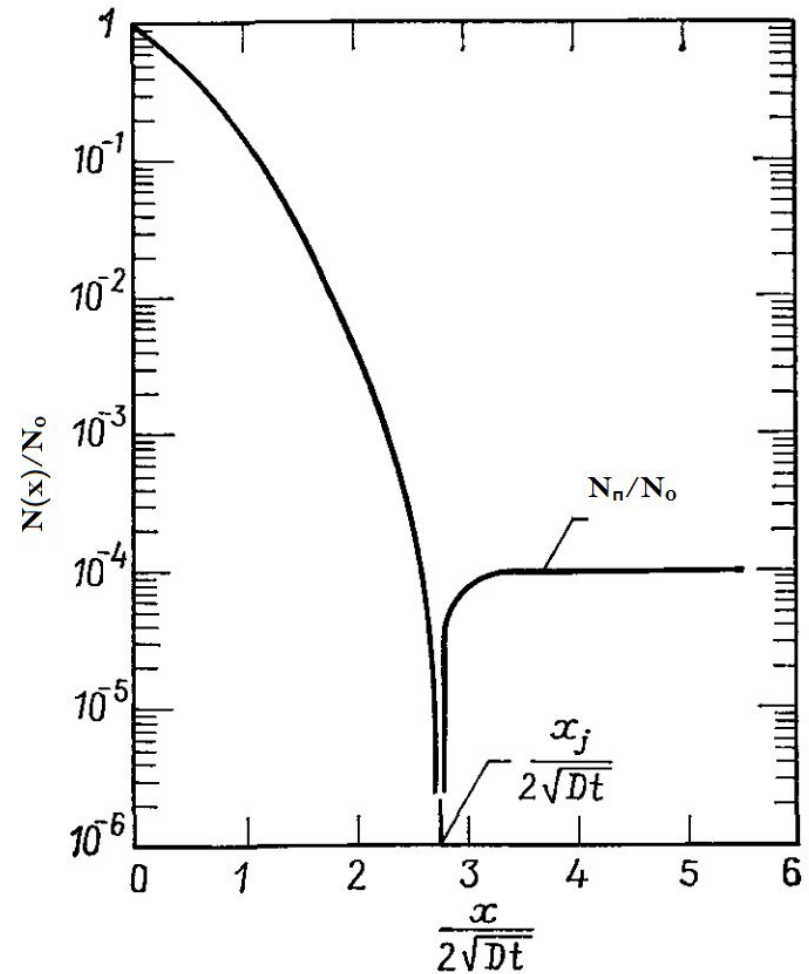
$$N(x, t) = N_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

$\operatorname{erfc} y$ - дополняющая к функции ошибки $\operatorname{erf} y$:

$$\operatorname{erfc} y = 1 - \operatorname{erf} y = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz$$

В результате за время t в твердое тело поступит количество примеси:

$$Q = \int_0^t J(t) dt = 2N \sqrt{\frac{Dt}{\pi}}$$



Адекватность модели

Адекватность математической модели – это соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта. Это соответствие следует оценивать с точки зрения целей исследования. Поэтому возможны различные подходы к оценке адекватности различных моделей.

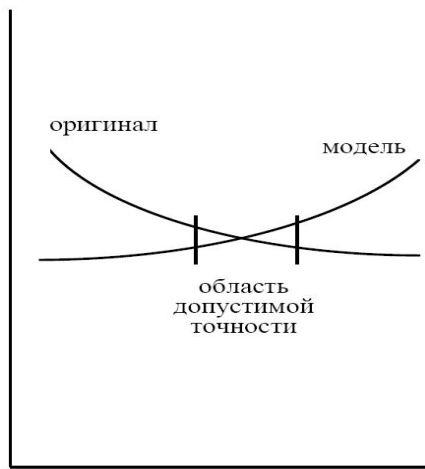
Точность означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра модели и оригинала ($\Delta U = U_{\text{модели}} - U_{\text{оригинала}}$) должна быть не больше, чем заранее заданное значение приемлемой погрешности $\Delta U_{\text{доп}}$.

Непротиворечивость подразумевает идентичный характер изменения соответствующих параметров, т.е. идентичный вид основных свойств функциональных зависимостей на отдельных участках, как-то: возрастание, убывание, экстремумы, выпуклость и т.п.

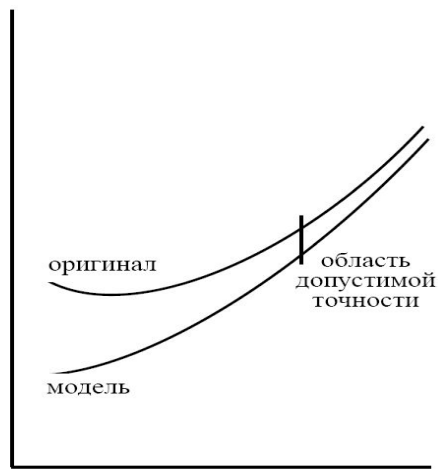
Для проверки адекватности необходимо иметь:

- исчерпывающую информацию о реальном объекте;
- результаты контрольного вычислительного эксперимента;
- критерий оценки точности математической модели;
- критерий проверки непротиворечивости математической модели.

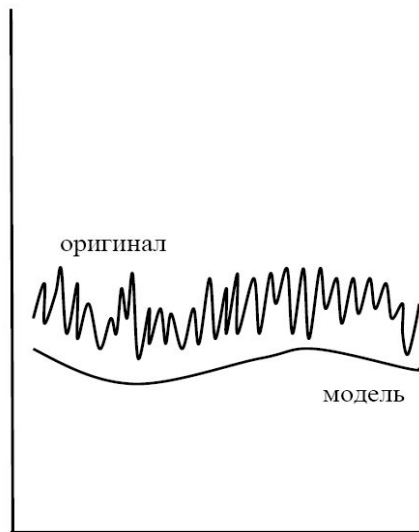
Адекватность модели



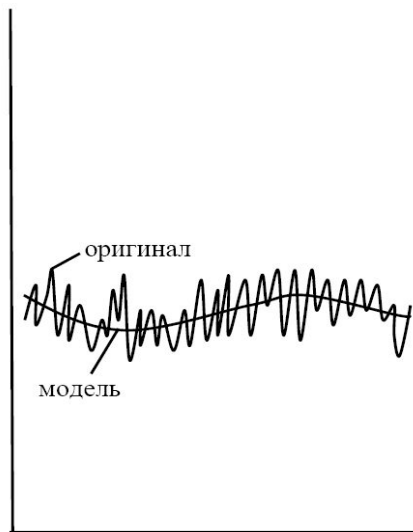
а



б



в



г

Точность модели

При оценке погрешности модели проводят сопоставление двух кривых:

- 1) $y = f(x)$ – модель;
- 2) $y^0 = f^0(x^0)$ – объект моделирования.

Погрешность оценивают в n точках, расстояние между которыми выбирают равномерным или в соответствии со смыслом решаемой задачи. Например, на крутых участках кривой эти точки можно брать гуще, на пологих участках - реже.

Вектор абсолютных погрешностей:

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^0$$

Вектор погрешностей несет в себе самую подробную информацию о точности модели, однако на практике погрешность оценивают чаще как норму этого вектора:

$$E = \|\Delta \mathbf{y}\|$$

Точность модели

$$E = \max_k |\Delta y_k| \quad \text{Максимум модуля погрешности.}$$

Широко распространенный вариант и по умолчанию, когда не указывают, каким образом определена погрешность, имеют в виду данный вариант. Он гарантирует, что в процессе использования модели никогда не встретится погрешность больше E . Недостаток такого критерия проявляется в случае, когда обе кривые проходят близко на большей части интервала изменения x , но в одном месте, например, на границах, имеют резкий выброс.

$$E = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta y_k| \quad \text{Средняя погрешность.}$$

Вариант используется реже, но может давать оценку, которая более правдоподобно соотносится со смыслом задачи моделирования. Недостатком является слишком оптимистическая оценка погрешности, которая может быть в несколько раз меньше максимальной.

$$E = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n |\Delta y_k|^2} \quad \text{Среднеквадратическая погрешность.}$$

Вариант распространен достаточно широко, и дает оценку, которая в смысле "оптимистичности" занимает промежуточное положение между первыми двумя, поскольку после возведения отдельных компонентов погрешности в квадрат возрастает вес компонент с большей погрешностью. Главным достоинством среднеквадратичной оценки погрешности является сопоставимость с понятием среднеквадратической погрешности измерений и гладкость функции, которая позволяет использовать эту оценку в задачах минимизации погрешности и в аналитических исследованиях.

Точность модели

Абсолютная погрешность: $\Delta y = y - y^o$

Относительная погрешность: $\gamma_y = (y - y^o) / y^o$

Приведенная погрешность: $\tilde{\gamma}_y = (y - y^o) / y_m^o$

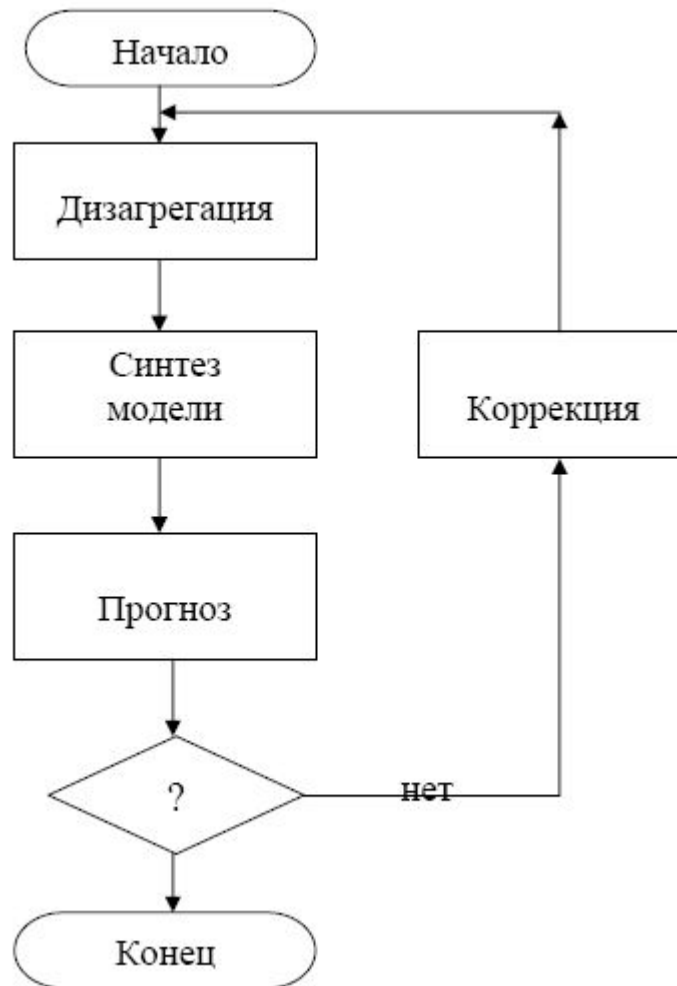
y_m^o – верхняя граница динамического диапазона или среднее (максимальное) значение по диапазону

В тех случаях, когда заранее неизвестно, какое из определений погрешности больше подходит по смыслу, решаемой задачи, можно пользоваться понятием модуля вектора погрешности:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

Достоинством этой оценки является то, что ни одна из составляющих не может превысить объявленное значение погрешности, а в предельных частных случаях, когда одна из компонент много больше другой получаем приведенные выше определения погрешностей по x или по y .

Этапы моделирования



Этапы математического моделирования

Аналитические методы решения

Методы решения системы уравнений могут быть аналитическими и численными.

Аналитические методы - методы разделения переменных, позволяют получить решение в виде формулы или группы формул, анализ которых дает наглядное представление о влиянии параметров на характеристики динамических процессов и т. д.

Основной недостаток аналитических методов в трудности математического описания, например, определения формы воздействия, задания граничных условий для сложных систем.

Численные методы решения

Решение задачи возможно только с конечным числом неизвестных. Поэтому для численного решения задачи математической физики, для которой характерно изменение некоторой величины в некоторой пространственно-временной области, её необходимо приближенно заменить некоторым дискретным аналогом. Для этого в пространственно-временной области выбирают конечное число точек. Всю совокупность точек называют **сеткой**, а каждую отдельную точку – **узлом сетки**. Дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия заменяют соотношениями между значениями искомой величины в узлах сетки (**процедура дискретизации**).

В результате дискретизации задачи математической физики получается система уравнений, которая не даёт точные значения неизвестной функции в узлах сетки. Уравнения, связывающие значения искомой величины в узлах сетки, строят на основе общих принципов, которые позволяют приближенно заменить дифференциальные уравнения и краевые условия соотношениями между значениями величины в близлежащих узлах. Эти принципы позволяют надеяться лишь на то, что при увеличении количества узлов и при уменьшении расстояний между соседними узлами ошибка, возникающая при дискретизации, будет неограниченно уменьшаться.

Численные методы решения

Конструкции современных изделий электронной техники зачастую представляют собой сложные системы с множеством различных связей. Для такой системы сложно построить расчётную модель, достаточно простую и одновременно с этим хорошо отражающую физические и динамические свойства.

Системы также могут содержать множество неконтролируемых параметров. При составлении и решении уравнений описывающих поведение системы возникает ряд математических трудностей.

Основу численных методов расчётов динамических параметров конструкции составляют:

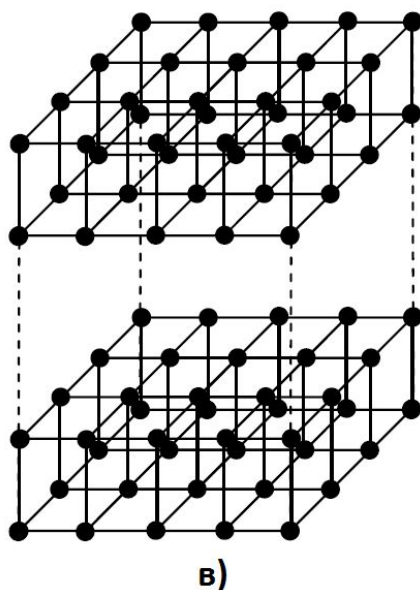
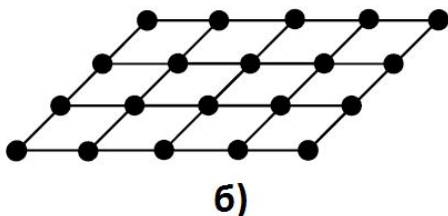
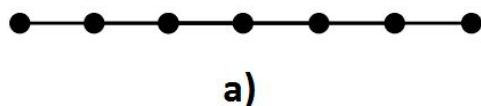
- метод конечных разностей (МКР);
- метод конечных элементов (МКЭ);
- различные вариационные методы.

Метод конечных разностей

Метод конечных разностей — численный метод решения дифференциальных уравнений, основанный на замене производных разностными схемами.

Для расчёта системы строится упрощенная модель-сетка.

В этой модели элементы системы с непрерывно распределенными параметрами заменяются набором дискретных элементов с сосредоточенными параметрами. Соседние узлы соединяются друг с другом связями.



Расчёт модели ведётся с помощью конечно-разностных уравнений. Уравнения образуют из дифференциальных уравнений посредством замены в них частных и обычных производных отношениями конечных приращений рассматриваемых переменных.

Дискретные модели элементов системы
а) одномерные; б) двумерные; в) трехмерные

Метод конечных элементов

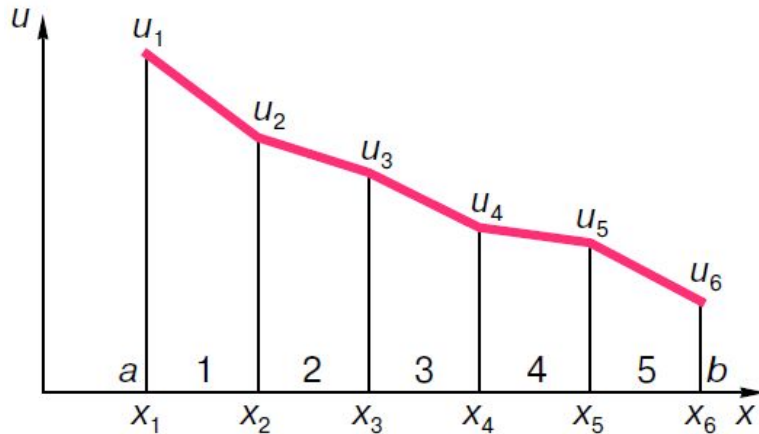
Исходная область определения функции разбивается сеткой, в общем случае, в отличие от МКР неравномерной, на отдельные участки – конечные элементы.

Искомая непрерывная функция заменяется кусочно-непрерывной, определенной для множества конечных элементов. Чаще всего для этого используются полиномы. Для одномерных функций конечными элементами являются отрезки прямой, для двумерных областей наиболее часто конечные элементы представляются в виде треугольников.

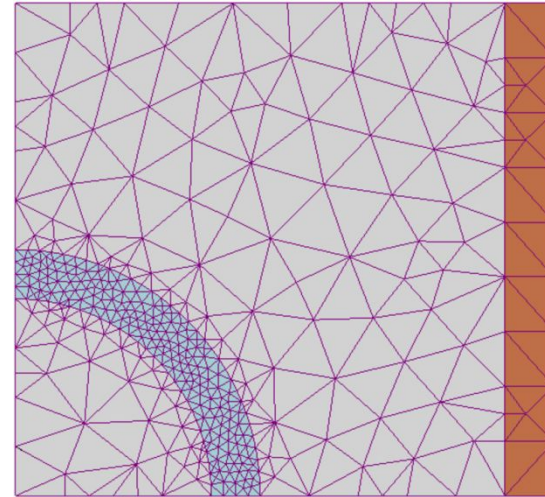
Достоинства метода:

1. Метод позволяет строить удобную схему формирования системы алгебраических уравнений относительно узловых значений искомой функции. Приближенная аппроксимация решения при помощи простых полиномиальных функций и все необходимые операции выполняются на отдельном типовом элементе. Затем проводится объединение элементов, что приводит к требуемой системе алгебраических уравнений.
2. Каждое отдельное алгебраическое уравнение, полученное на основе метода конечных элементов, содержит незначительную часть узловых неизвестных от общего числа (многие коэффициенты в уравнениях алгебраической системы равны нулю, что значительно облегчает её решение).
3. Подходит для решения континуальных и дискретных задач.

Метод конечных элементов



Разбиение одномерной функции



Многомерное разбиение

Алгоритм:

- 1) Разбиение заданной области на конечные элементы;
- 2) Выбор аппроксимирующей функции в виде полинома для каждого элемента;
- 3) Объединение полученных полиномиальных функций в систему алгебраических уравнений;
- 4) Решение полученной системы уравнений и определение вектора узловых значений функции (перемещений, ускорений).

математическое моделирование при разработке изделий электронной техники

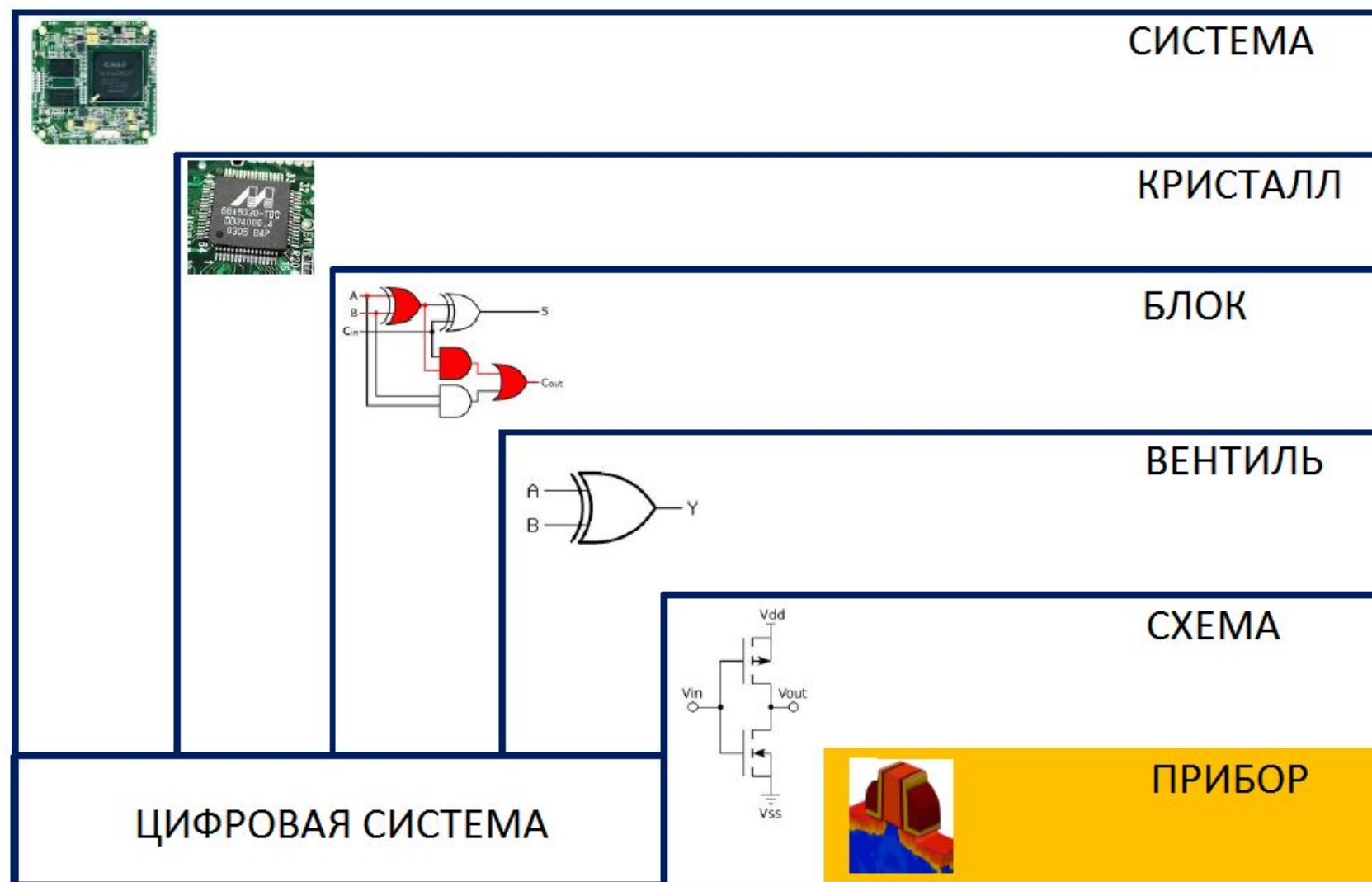
Математическое моделирование позволяет решить ряд задач, а именно:

- уменьшить число экспериментов, при отработке новых конструктивно-технологических решений;
- исследовать новые изделия при различных режимах работы и различных воздействиях;
- разрабатывать новые принципы функционирования рассматриваемых систем.

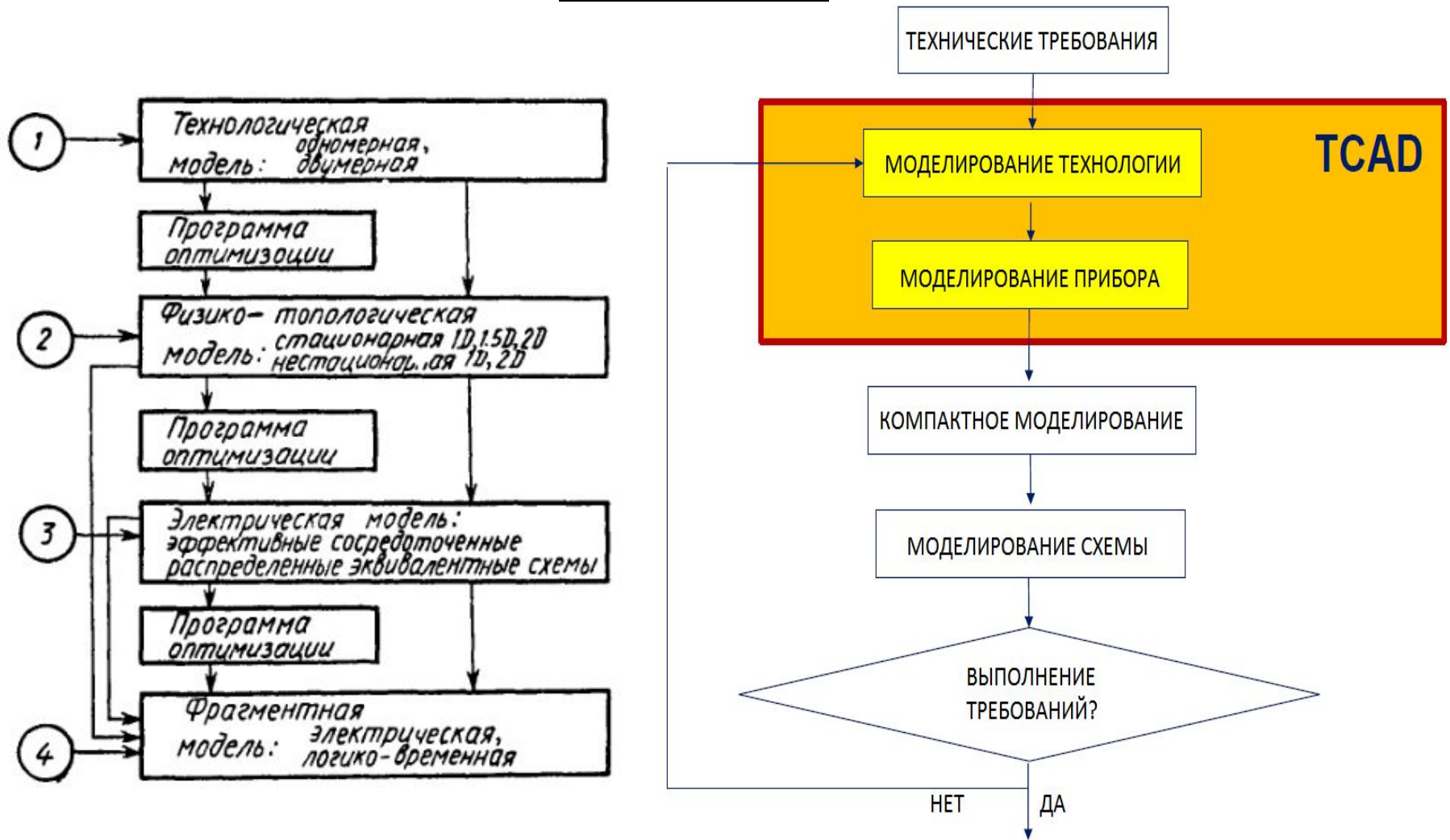
Моделирование ведется на всех этапах жизненного цикла изделий, а именно:

- технология изготовления изделий электронной техники;
- физико-топологическое моделирование;
- схемотехническое моделирование;
- функциональное моделирование в рамках "малой" системы;
- функциональное моделирование в рамках "большой" системы.

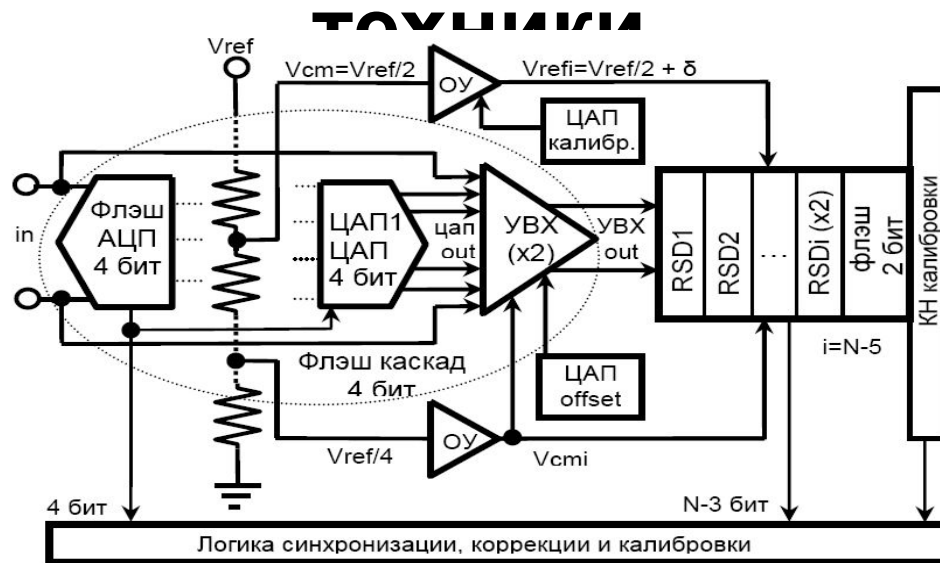
математическое моделирование при разработке изделий электронной техники



разработка изделий электронной техники



Блок-схема различных этапов моделирования ИЭТ



Функциональная блок-схема ИМС

