

Дифференциалы высших порядков

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i; \delta - \text{другие обозначения.} \quad \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Опр. $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в одн. $E \subset E_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m -го порядка от $f(x)$ называется (x -незав. перемен.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))|_{\delta x = dx}$$

Дифференциалы высших порядков

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i; \quad \delta - \text{другое обознач.} \quad \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Опр. $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в одн. $E \subset E_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m -го порядка от $f(x)$ называется $(x$ -незав. перемен.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))|_{\delta x = dx}$$

$$d^2 f = \delta(df)|_{\delta x = dx} = \delta\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j\right) dx_i|_{\delta x = dx}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \quad \dots$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}$$

Аналогия: $H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $H^2 = H \cdot H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j, \dots$

$$H^m = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1} \dots a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Итак, $d^m = (\nabla, dx)^m$

Дифференциалы высших порядков

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i; \delta - \text{другие обозначения. } \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Опр. $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m -го порядка от $f(x)$ называется (x -незав. перемен.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))|_{\delta x = dx}$$

$$d^2 f = \delta(df)|_{\delta x = dx} = \delta\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j\right) dx_i|_{\delta x = dx}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \dots,$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}.$$

Аналогия: $H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $H^2 = H \cdot H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j, \dots,$

$$H^m = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1} \dots a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\text{Итак, } d^m = (\nabla, dx)^m$$

В частности для $n=2$, т.е. $f = f(x, y)$ имеем: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad d^3 f =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3, \text{ и т.д.}$$

Дифференциалы высших порядков

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \quad df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i; \delta - \text{другие обозначения.} \quad \delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$$

Опр. $m \geq 2$, $f(x) \in C_m$ в одн. $E \subset E_n$, $dx = \Delta x$ не меняется $\forall x \in E$

Дифференциалом m -го порядка от $f(x)$ называется (x -незав. перемен.):

$$d^m f(x) \equiv \delta(d^{m-1} f(x))|_{\delta x = dx}$$

$$d^2 f = \delta(df)|_{\delta x = dx} = \delta\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i|_{\delta x = dx} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j\right) dx_i|_{\delta x = dx}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \quad d^3 f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} dx_i dx_j dx_k, \dots$$

$$d^m f = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m}$$

Аналогия: $H = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $H^2 = H \cdot H = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j, \dots$

$$H^m = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n a_{i_1} \dots a_{i_m}$$

$$\Rightarrow d^m f = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i\right)^m f = (\nabla, dx)^m f, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\text{Итак, } d^m = (\nabla, dx)^m$$

Инвариантность при $m \geq 2$ нет (в общем случае). Если же

$$x_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} t_j + \beta_i \quad (i=1, \dots, n), \text{ где } t_j \quad (j=1, \dots, p) - \text{независ. перемен. то}$$

$$dx_i = \sum_{j=1}^p \alpha_{ij} dt_j, \text{ т.е. } dt_j = \text{const} \Rightarrow dx_i = \text{const} \Rightarrow \text{инвариантность}$$

сохраняется при линейной замене.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F'(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F')$$

$$r_m(t, F') = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \Theta < 1 \quad (\text{Ларгранж})$$

Как подобрать - не знаю. $t - t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \Theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F'), r_m(t, F') = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n > 1$.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F)$$

$$r_m(t, F) = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Ларанж})$$

Как обобщать - нехорошо. $t - t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F), r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n > 1$.

Т8. $m \geq 0$, $f(x) \in C_{m+1}$ в обл. $E \subset E_n$, $x^{(0)} \in E$, $x \in E$, $\Delta x = x - x^{(0)}$,

$x^{(0)} + t\Delta x \in E \quad \forall t \in [0, 1]$. $\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), r_m(x, f) = \frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

Д-во. $F(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x)$, $0 \leq t \leq 1$. $d^j F(t) = d^j f(x^{(0)} + t\Delta x)$, $j = 1, \dots, m, m+1$

(инвар. при линейной замене) $\Rightarrow \Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)}) = F(1) - F(0) = \Delta F(0) =$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{d^j F(0)}{j!} + \underbrace{\frac{d^{m+1} F(\theta)}{(m+1)!}}_{r_m(t, F)} = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + \underbrace{\frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{(m+1)!}}_{r_m(x, f)} \quad \text{Теор. доказана.}$$

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F)$$

$$r_m(t, F) = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Ларпанж})$$

Как обобщать - нехорошо. $t - t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F), r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $D > 1$.

Т8. $m \geq 0$, $f(x) \in C_{m+1}$ в обл. $E \subset E_n$, $x^{(0)} \in E$, $x \in E$, $\Delta x = x - x^{(0)}$,

$x^{(0)} + t\Delta x \in E \quad \forall t \in [0, 1]$. $\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), \quad r_m(x, f) = \frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0 \Rightarrow f(x) - f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)} + \theta \Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \quad (\text{ф-ла Лагранжа})$$

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F)$$

$$r_m(t, F) = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Ларанж})$$

Как обобщать - нехорошо. $t - t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F), r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n > 1$.

Т8. $m \geq 0$, $f(x) \in C_{m+1}$ в обл. $E \subset E_n$, $x^{(0)} \in E$, $x \in E$, $\Delta x = x - x^{(0)}$,

$x^{(0)} + t\Delta x \in E \quad \forall t \in [0, 1]$, $\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), r_m(x, f) = \frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0 \Rightarrow f(x) - f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)} + \theta \Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \quad (\text{Ф-ла Ларанжа})$$

$$m=1 \Rightarrow f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \Delta x_j$$

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F')$$

$$r_m(t, F') = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \Theta < 1 \quad (\text{Лагранж})$$

Как обобщается - нехорошо. $t-t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \Theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \Theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F'), \quad r_m(t, F') = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \Theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и сумму переписываем на $n > 1$.

Т.8. $m \geq 0$, $f(x) \in C_{m+1}$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$, $x \in E$, $\Delta x = x - x^{(0)}$,

$x^{(0)} + t\Delta x \in E \quad \forall t \in [0, 1]$. $\Rightarrow \exists \Theta \in (0, 1)$:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), \quad r_m(x, f) = \frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \Theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0 \Rightarrow f(x) - f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)} + \Theta \Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i \quad (\text{ф-ла Лагранжа})$$

$$m=1 \Rightarrow f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)} + \Theta \Delta x) \Delta x_i \Delta x_j$$

Сл (формула Пеано). При условиях Т.8 $\Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f)$, $r_m(x, f) = o(\|\Delta x\|^m)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

$$\text{Д-во. } r_m(x, f) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x^{(0)} + \Theta \Delta x) = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{m+1}=1}^n \frac{\partial^{m+1} f(x^{(0)} + \Theta \Delta x)}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}} \Delta x_{i_2} \dots \Delta x_{i_{m+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{|r_m(x, f)|}{\|\Delta x\|^m} \leq \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{m+1}=1}^n \left| \frac{\partial^{m+1} f(x^{(0)} + \Theta \Delta x)}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}} \right| \cdot \frac{|\Delta x_{i_2}| \dots |\Delta x_{i_{m+1}}|}{\|\Delta x\|^m} \leq (|\Delta x_k| \leq \|\Delta x\|) \leq$$

$$\leq \frac{\|\Delta x\|}{(m+1)!} \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{m+1}=1}^n \left| \frac{\partial^{m+1} f(x^{(0)} + \Theta \Delta x)}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m+1}}} \right| \rightarrow 0 \text{ при } \|\Delta x\| \rightarrow 0$$

имеет предел при $\|\Delta x\| \rightarrow 0 \Rightarrow 0$ ч.т.д.

Сл. доказано.

Формула Тейлора

$$n=1 \Rightarrow F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!} \cdot (t-t_0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(t_0) \cdot (t-t_0)^m + r_m(t, F)$$

$$r_m(t, F) = \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) \cdot (t-t_0)^{m+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (\text{Ларанжес})$$

Как обобщается - неясно. $t - t_0 = \Delta t = dt$, $\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0)$, $dF(t_0) = F'(t_0)dt$,

$$\dots, d^m F(t_0) = F^{(m)}(t_0) \cdot dt^m, d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0)) = F^{(m+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) dt^{m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0) = \frac{dF(t_0)}{1!} + \dots + \frac{d^m F(t_0)}{m!} + r_m(t, F), r_m(t, F) = \frac{d^{m+1} F(t_0 + \theta(t-t_0))}{(m+1)!}$$

Эту формулу и будем переносить на $n > 1$.

Т. 8. $m \geq 0$, $f(x) \in C_{m+1}$ в обл. $E \subset E_n$, $x^{(0)} \in E$, $x \in E$, $\Delta x = x - x^{(0)}$,

$x^{(0)} + t\Delta x \in E \quad \forall t \in [0, 1]$, $\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$:

$$f(x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), \quad r_m(x, f) = \frac{d^{m+1} f(x^{(0)} + \theta \Delta x)}{(m+1)!}$$

$$m=0 \Rightarrow f(x) - f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)} + \theta \Delta x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \quad (\text{ф-ла Лагранжа})$$

$$m=1 \Rightarrow f(x^{(0)} + \Delta x) = f(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \Delta x_j$$

$$\underline{\text{Сл (формула Пеано)}}. \text{ При условиях Т. 8 } \Delta f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(x^{(0)})}{j!} + r_m(x, f), \quad r_m(x, f) = o(\|\Delta x\|^m) \quad (\|\Delta x\| \rightarrow 0)$$

Для остальных членов в формуле Пеано достаточно меньшие условия.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум, Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n :$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0.$$

Д-во. $\varphi(x_i) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. $\varphi(x_i)$ имеет экстремум

$$\text{при } x = x^{(0)} \Rightarrow \varphi'_{x_i}(x^{(0)}) = 0. \text{ Но } \varphi'_{x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0.$$

т. доказано.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n :$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0.$$

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального

максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума),

если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n :$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0.$$

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel Oxy$.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум, Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n : \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$), $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n : \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$), $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стат. точке есть экстремум.

Примеры. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $df = \underbrace{2x dx}_{\frac{\partial f}{\partial x}} + \underbrace{2y dy}_{\frac{\partial f}{\partial y}}$
 $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) - \text{стат. точка.}$

Там стр. минимум, т.к. $\forall (x, y) \neq (0, 0) f(x, y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0, 0)$

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n : \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel 0xy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$), $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стат. точке есть экстремум.

Примеры. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $df = \underbrace{2x dx}_{\frac{\partial f}{\partial x}} + \underbrace{2y dy}_{\frac{\partial f}{\partial y}}$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad (0, 0) - \text{стат. точка.}$$

Там стр. минимум, т.к. $\forall (x, y) \neq (0, 0) f(x, y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0, 0)$

2. $f(x, y) = xy$ $df = \underbrace{y dx}_{\frac{\partial f}{\partial x}} + \underbrace{x dy}_{\frac{\partial f}{\partial y}}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (0, 0) - \text{стат. точка}$

Там нет экстремума, т.к. $\forall \alpha \neq 0 f(\alpha, \alpha) = \alpha^2 > 0 = f(0, 0) > -\alpha^2 = f(\alpha, -\alpha)$

Экстремум функций нескольких переменных

Опр. $f(x)$ опред. в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$. $x^{(0)}$ назыв. т. локального максимума (минимума, строгого максимума, строгого минимума), если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow f(x) \leq f(x^{(0)})$ ($\geq, <, >$).

Макс. и мин. — экстремум. Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстремум.

Т1. (Необх. усл.) $f(x)$ имеет экстремум при $x = x^{(0)}$ и $\exists i = 1, \dots, n : \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $f(x)$ имеет экстр. при $x = x^{(0)} \in E \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$.

Геометр. смысл для $f(x, y)$: касат. пл-сть $\parallel Oxy$.

Опр. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $df(x^{(0)}) = 0$ ($x^{(0)} \in E$), $x^{(0)}$ называется стационарной (критической) точкой.

Не во всякой стат. точке есть экстремум.

Т2. $f(x) \in C_2$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, $x^{(0)} \in E$, $x^{(0)}$ — стат. точка, $\varphi(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j$
 $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x^{(0)}) \forall \xi \in U_\delta(0) \varphi(x, \xi) \geq 0$ ($\leq$) $\Rightarrow x^{(0)}$ — т. мин. (т. макс.)

$$\begin{aligned} \text{Д-во } f(x) &= f(x^{(0)}) + \underbrace{df(x^{(0)})}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(x^{(0)} + \theta \Delta x) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)} + \theta \Delta x) \Delta x_i \Delta x_j = \\ &= f(x^{(0)}) + \frac{1}{2} \varphi(\underbrace{x^{(0)} + \theta \Delta x}_x, \underbrace{\Delta x}_{\xi}). \Rightarrow f(x) \geq f(x^{(0)}) \quad (\leq) \end{aligned}$$

Теорема 2-звиза