

# **Решение иррациональных неравенств методом интервалов**

**«Если бы люди знали, как много я  
тружусь, чтобы добиться  
мастерства, они перестали бы  
считать меня таким уж  
талантливым»**

Микеланджело

## Цель урока:

1. **Усвоить алгоритм решения иррациональных неравенств методом интервалов.**
2. **Научиться решать иррациональные неравенства с применением алгоритма.**



**Иррациональными называют  
неравенства, в которых переменные  
входят под знак корня**

## Решим неравенства:

1.

$$\sqrt{x-5} < 1$$

2.

$$\sqrt{x+7} > x+1$$

3.

$$(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$$

# Решение первого неравенства

1.  $\sqrt{x-5} < 1$  равносильно  $\sqrt{x-5} - 1 < 0$

**Шаг 1.** Рассмотрим иррациональную функцию  $f(x) = \sqrt{x-5} - 1$  и найдем область определения  $x - 5 \geq 0$

$x \geq 5$  - область определения

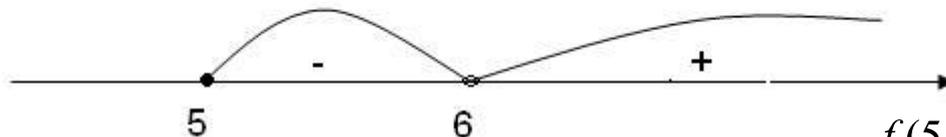
**Шаг 2.** Вычислим нули функции  $\sqrt{x-5} - 1 = 0$

$$\sqrt{x-5} = 1$$

$$(\sqrt{x-5})^2 = 1^2$$

$$x - 5 = 1$$

$x = 6$  - нуль функции



$$f(5.5) = \sqrt{5.5-5} - 1 = \sqrt{0.5} - 1 < 0$$

$$f(7) = \sqrt{7-5} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0$$

**Ответ**

$$x \in [5; 6)$$

2.  $\sqrt{x+7} > x+1$  равносильно  $\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$

**Шаг 1.** Рассмотрим иррациональную функцию  $f(x) = \sqrt{x+7} - x - 1$  и найдем область ее определения  $x + 7 \geq 0$

$x \geq -7$  - область определения

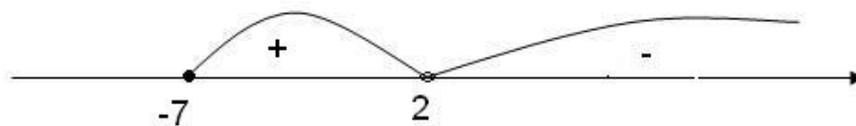
**Шаг 2.** Вычислим нули функции  $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+7 = x^2 + 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_1 = -3; x_2 = 2 \end{cases}$$

$x = 2$  - нуль функции

**Шаг 3.**



$$x \in [-7; 2)$$

$$f(-6) = \sqrt{-6+7} - (-6) - 1 = 1 + 6 - 1 = 6 > 0$$

$$f(9) = \sqrt{9+7} - 9 - 1 = 4 - 10 = -6 < 0$$

3.  $(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} \leq 0$

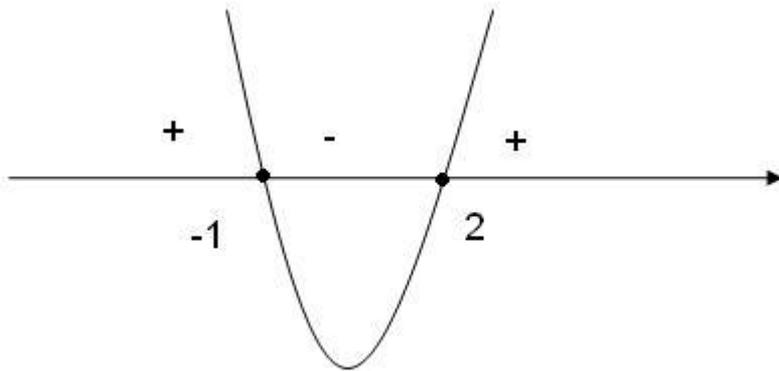
**Шаг1. рассмотрим иррациональную функцию**  
**Найдем область определения**

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2}$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$



**Область определения**  $x \leq -1$  **и**  $x \geq 2$

**Шаг 2. Вычислим нули функции**  $(x-1) \cdot \sqrt{x^2 - x - 2} = 0$

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

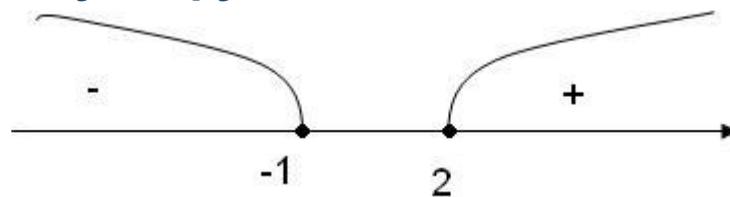
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$

**-1; 1; 2 - нули функции**

**Шаг 3.**



$$f(-3) < 0$$

$$f(3) > 0$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty; 1]$  и  $x = 2$

# Алгоритм решения иррациональных неравенств:

1. Введение иррациональной функции; нахождение области определения функции.
2. Вычисление нулей функции.
3. На координатной прямой:
  - отмечаем нули функции, принадлежащие области определения;
  - определяем знак функции на каждом промежутке;
  - с учетом знака неравенства выписываем ответ.

# Упражнения для самостоятельного решения: :

1.

$$\sqrt{2x + 9} < 3 - x$$

2.

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$$

3.

$$\sqrt{9 - x^2} > 3 - \sqrt{6x - x^2}$$

Для контроля используем лист самопроверки

# Проверяем:

**Неравенство**  $\sqrt{2x+9} < 3-x$

**1 шаг**  $x \geq -4.5$

**2 шаг**  $x = 0$

**3 шаг**  $x \in [-4.5; 0)$

**Неравенство**  $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$

**1 шаг**  $x \leq -2$  **и**  $x \geq 5$

**2 шаг**  $x = 5\frac{9}{13}$

**3 шаг**  $x \in (-\infty; -2] \cup [5; 5\frac{9}{13})$

**Неравенство**  $\sqrt{9-x^2} > 3-\sqrt{6x-x^2}$  **1 шаг**  $x \in [0; 3]$

**2 шаг**

$x = 0$

**и**

$x = 3$

**3 шаг**

$x \in (0; 3)$

## Оценка:

- **5 баллов** – задание выполнено полностью и верно.
- **4 балла** – задание верно выполнено на первом и втором шаге. Допущена ошибка в вычислениях на третьем шаге.
- **3 балла** - задание верно выполнено на первом шаге, вычислительная ошибка на втором шаге.
- В остальных случаях – **2 балла**.

# Задание для самостоятельной работы

$$\sqrt{3x + 13} < x + 1$$