

Лекція 4. Вступ до математичного аналізу

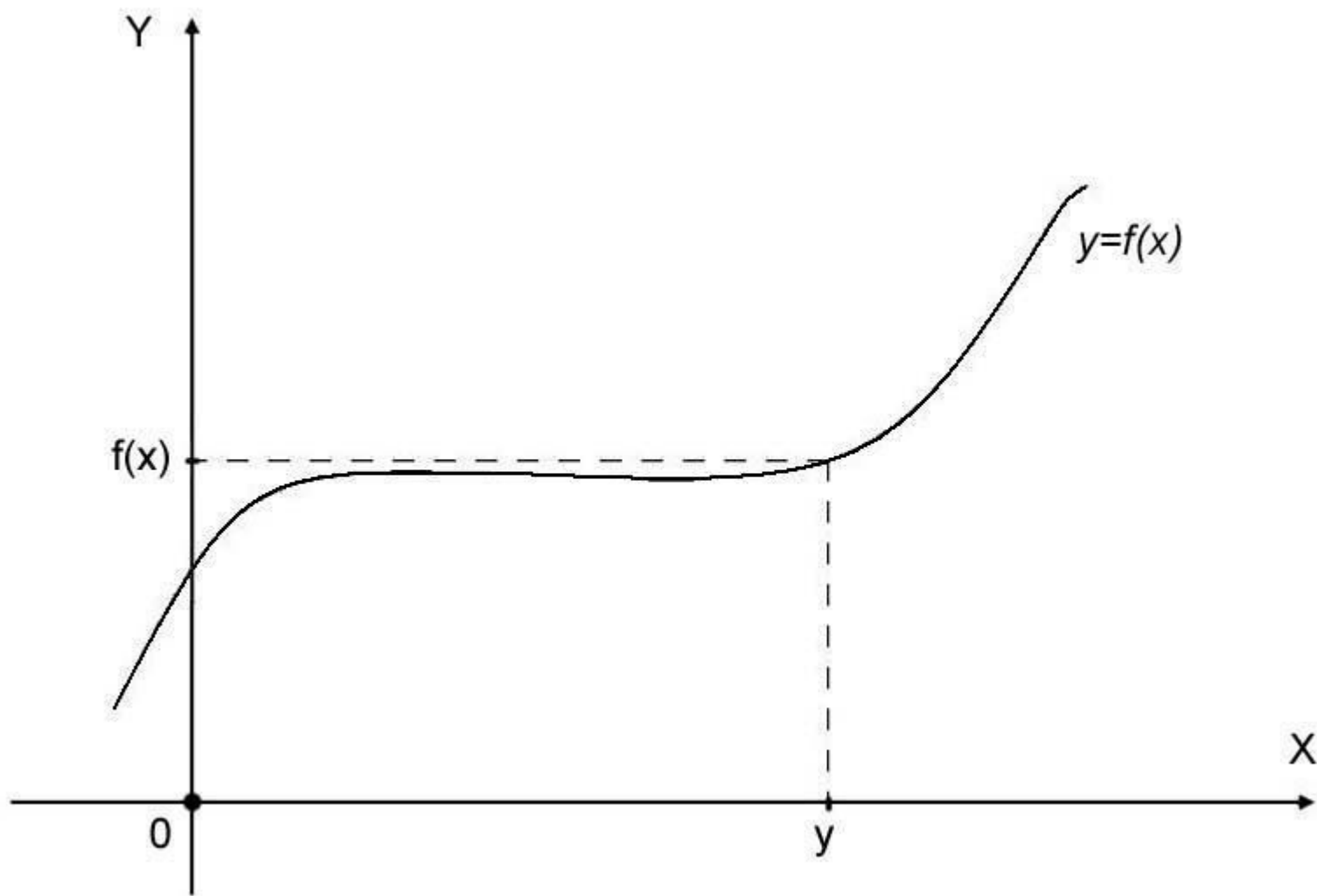
1. Функції
2. Послідовності та їх границі
3. Границі функцій



1. Функції

Коли кожному елементу x множини X ($x \in X$) ставиться у відповідність визначений елемент y множини Y ($y \in Y$), то кажуть, що на множині X задано функцію $Y=f(x)$.

Графічна інтерпретація функціональної залежності (графік функції)



1. x – незалежна змінна
(аргумент);
2. X – множина визначення
(існування) функції,
позначається $D(y)$;
3. y – залежна змінна;
4. Y – область значень функції;
5. f – символ функціональної
залежності.

Функція може задаватися наступними способами:

- **таблично** (задається таблиця, в якій значенням x відповідають значення y);

Приклад. При вивченні залежності об'ємів продаж протягом дня прохолоджувальних напоїв V торгівельною точкою (у літрах) від температури повітря t (у градусах Цельсія) отримали наступні результати:

T	18	19	22	24	28
V	150	160	280	450	600

Маємо, таким чином, таблично задану функцію $V(t)$.

Функція може задаватися наступними способами:

- ▣ **словесно** (наприклад, функція Діріхле: $f(x)=1$, якщо x – раціональне число, $f(x)=0$, якщо x – ірраціональне);
- ▣ **графічно** (на координатній площині зображується лінія, для кожної точки якої ордината вважається значенням функції, яке відповідає значенню абсциси);
- ▣ **аналітично** (якщо значення функції знаходиться з рівності або рівностей, які пов'язують x та y):

$$y=x, y=\sin x$$

Можливі наступні варіанти аналітичного задання функції:

а) **явне задавання функції**
співвідношенням $y=f(x)$;

б) **неявне задавання функції**
співвідношенням $f(x,y)=0$, $y(x)$
знаходиться як корінь рівняння
 $f(x_1, y(x_1))=0$ для всіх x_1 з області
визначення;

□ в) параметричне задавання функції системою співвідношень:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

де t – параметр, y вважається значенням функції, що відповідає x . Вона задає параметрично залежність y від x .

Приклад. Дана функція може

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^4 + 2t^2 \end{cases} \text{ и задана явно: } y = x^2 - 1$$

Властивості функцій

1. Парність та непарність.

Парною називається функція $y=f(x)$, така що для $\forall x \in D(x)$, число $(-x)$ також належить $D(x)$ і **$f(x)=f(-x)$** , і, відповідно, **непарною**, якщо для $\forall x \in D(x)$, $(-x) \in D(x)$, проте **$f(-x)=-f(x)$** . Функція, яка не є а ні парною а ні непарною називається функцією **загального вигляду** (або загального положення).

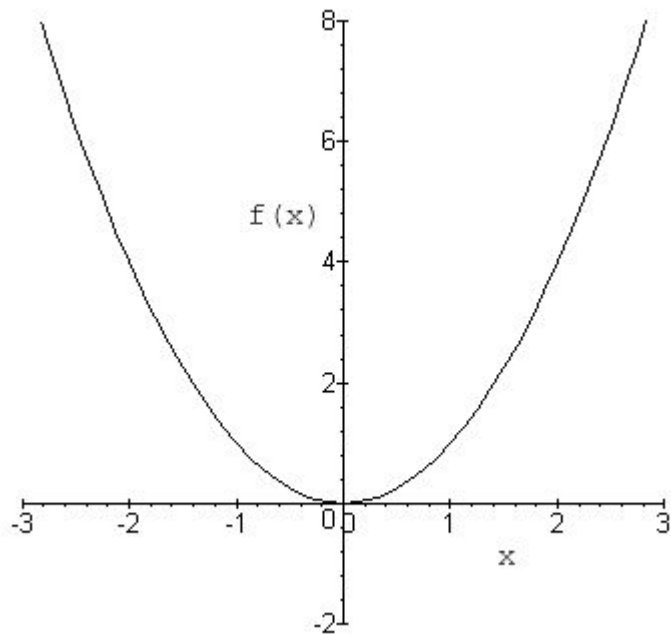
Властивості функцій

2. Монотонність.

Зростаючою (спадною) називається функція, для якої на проміжку X більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

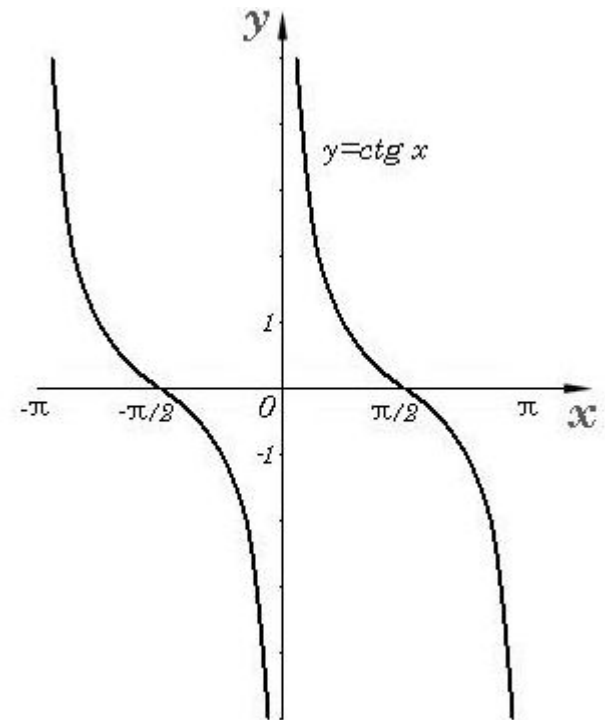
Зростаючі та спадні функції називаються **строго монотонними**. Якщо ж більшому значенню аргументу відповідає не менше (не більше), ніж попереднє, то функція називається **неспадною (незростаючою)**. Такі функції також називають **монотонними**.

Приклади строго монотонних функцій



$y=x^2$ для всіх $x \in [0; \infty)$

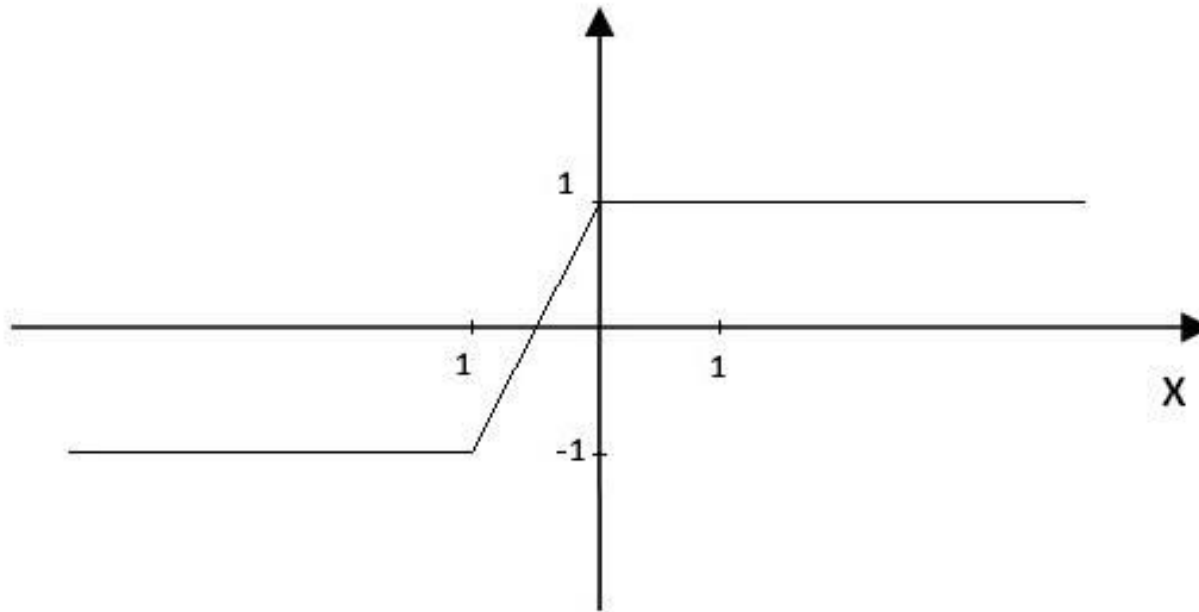
функція зростає



$y=ctg x$

спадає для всіх x

Приклади монотонних функцій



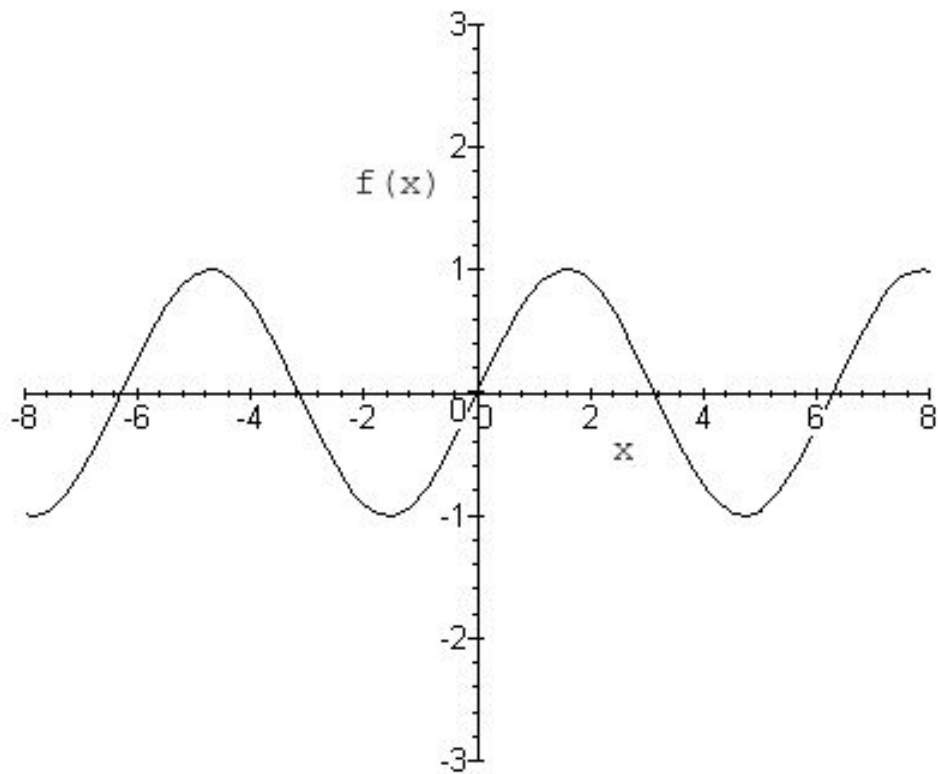
$y = |x+1| - |x|$ є неспадною .

Властивості функцій

3. Обмеженість.

Обмеженою на множині X називається функція, для якої існує таке число M , що **$|f(x)| \leq M$** для всіх $x \in X$.

Приклади обмежених функцій



$$y = \sin x$$

Властивості функцій

4. Періодичність.

Періодичною називається функція, для якої існує таке число $T \neq 0$, що для довільного $x \in D(x)$ виконується рівність $f(x) = f(x+T)$, при цьому періодом функції називається найменше додатне число T , яке задовольняє цій умові.

Типи функцій

Якщо значенню $y \in E(y)$ ставиться у відповідність єдине x таке, що $f(x)=y$ то отриману функцію називають **оберненою** до $y=f(x)$ позначають $x=f^{-1}(y)$.

Наприклад: для функції $y=x^2$ оберненою є $y=\sqrt{x}$.

Складні функції (суперпозиції функцій): нехай $y=f(u)$, де $u \in D(u)$, а множина $D(u)$ є областю значень функції $u=\phi(x)$. Тоді кажуть, що визначено складну функцію $y=f(\phi(x))=F(x)$, або, що те ж саме, що функція F є суперпозицією функцій f та ϕ .

Наприклад: $y=\ln \sin x$ (суперпозиція логарифму та синуса).

Елементарні функції

- **Степенева** $y=x^a$;
- **Показникова** $y=a^x$;
- **Логарифмічна** $y=\log_a x$;
- **Гіперболічна** $y=a/x$;
- **Експоненційна** $y=e^{a/x}$;
- **Многочлени** $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$
ступеню n

Примітка: перші три функції називають *основними елементарними* функціями, остання функція є *алгебраїчною* функцією.

2. Послідовності та їх границі

Кажуть, що задано **числову послідовність**, якщо кожному натуральному числу поставлене у відповідність певне дійсне число. Таким чином, **числова послідовність** є функцією натурального аргументу $a_n = f(n)$.

Послідовність записують у вигляді $a_1, a_2, \dots, a_n$ або $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ при цьому $a_1, a_2, \dots, a_n$ **члени послідовності**, $a_n = f(n)$ **загальний (n-ий) член послідовності**.

Оскільки послідовність є частинним випадком функції, то для неї використовують ті ж самі терміни: монотонність, обмеженість, тощо.

Число **a** називають **границею** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
послідовності і записують $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$,
якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$
знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що
для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується
нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ (інакше кажучи,
знайдеться такий номер члена
послідовності, починаючи з якого, всі
її члени потраплять до ε - околу
числа a).

Якщо послідовність має границю, вона називається **збіжною**, інакше – **розбіжною**.

Властивості збіжних послідовностей:

1) Якщо існує границя послідовності, то вона єдина.

2) Збіжна послідовність є обмеженою.

3) Якщо, починаючи з деякого номеру $n \geq N$ виконується нерівність $a_n < b_n < c_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ то $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ (теорема про границю проміжної послідовності).

4) Монотонна обмежена послідовність – збіжна.

Якщо $a = 0$, то послідовність називається **нескінченно малою**.

Якщо послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ має границю a , то $a_n = a + \alpha_n, \forall n$, де $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - нескінченно мала, то послідовність $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ (при $\alpha_n \neq 0$) є **нескінченно великою** (така послідовність необмежена, абсолютні величини її членів нескінченно зростають);

Запровадимо **арифметичні операції над збіжними послідовностями**. Нехай загальний член однієї послідовності a_n , другої - b_n , тоді $c_n = \alpha \cdot a_n$ - послідовність, помножена на число, $\alpha_n = a_n \pm b_n$ - сума (різниця) послідовностей, $f_n = a_n \cdot b_n$ - добуток послідовностей, $q_n = \frac{a_n}{b_n} (b_n \neq 0)$ - частка послідовностей,

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n ;$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ;$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Приклади

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

Типи невизначеностей при знаходженні границь

- якщо a_n, b_n – нескінченно великі послідовності, то при знаходженні границі $d_n = a_n \pm b_n$ може виникнути невизначеність $(\infty - \infty)$.
- якщо a_n – нескінченно мала послідовність, а b_n – нескінченно велика (чи навпаки), то при знаходженні границі $f_n = a_n \cdot b_n$ маємо невизначеність $(0; \infty)$ (або $(\infty; 0)$);
- якщо a_n, b_n є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими то при знаходженні границі $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ маємо невизначеності відповідно $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Приклад розкриття невизначеності при знаходженні границі

$$a_n = \frac{3n + 2}{2n + 1} \text{ має місце невизначеність типу } \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

Якщо чисельник і знаменник поділити на n то

$$a_n = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \quad \text{звідси матимемо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$$

Приклад розкриття невизначеності при знаходженні границі

$a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ має місце невизначеність типу $(0 \cdot \infty)$

Послідовність розбивають на дві частини.

$$a_n^{(1)} = n,$$

$$a_n^{(2)} = \sqrt{n^2 + 1} - n$$

Для другої частини послідовності запишемо:

$$\begin{aligned} a_n^{(2)} &= \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

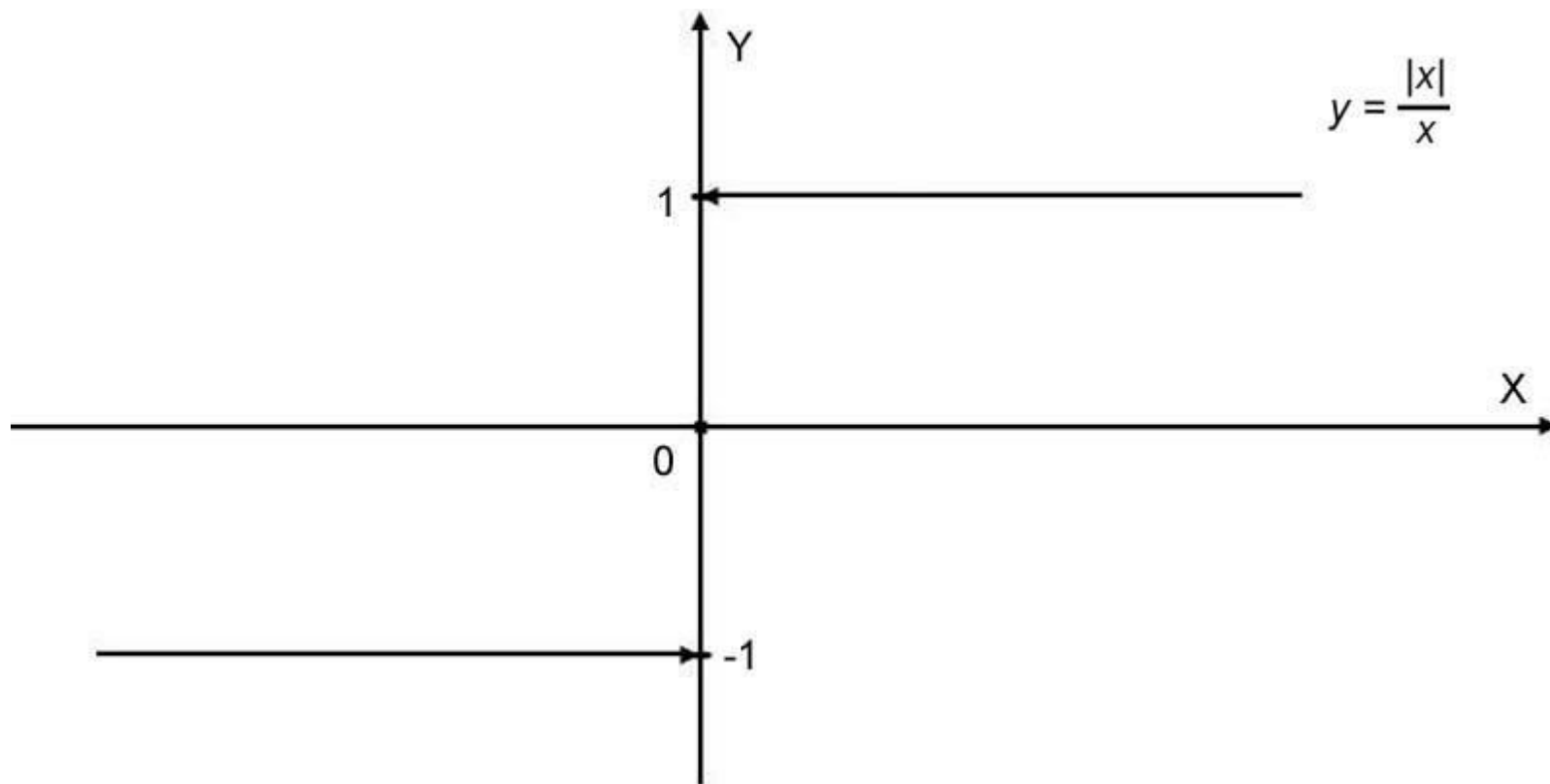
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + 1} + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}.$$

3. Границі функцій

Число A називається **границею функції** $y=f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ (наскільки завгодно малого) знайдеться число $S(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх x , $|x| > S(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Число A називається **границею функції** $y=f(x)$ при x , що прямує до x_0 (записується $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$), якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\exists$ $\delta(\varepsilon)$ та $\delta(\varepsilon)$ переривисті $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$ впливає нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$.

- 1) Існування границі функції при $x \rightarrow x_0$ не вимагає існування значення функції $f(x_0)$, тобто пов'язане з поведінкою функції поблизу цієї точки.
- 2) Якщо при прямуванні x до x_0 змінна x приймає лише значення менші (більші) за x_0 , то кажуть про прямування x до x_0 знизу ($x \rightarrow x_0 - 0$) або зверху ($x \rightarrow x_0 + 0$), і, відповідно, про односторонні границі функції.



Властивості функцій, що мають границю, відповідають властивостям збіжних послідовностей.

- 1) Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \rightarrow x_0$, то ця **границя єдина**.
- 2) Якщо границя функції дорівнює 0, то така функція називається **нескінченно малою**.
- 3) Функція тоді і тільки тоді має границею число A (при x , що прямує до числа x_0 або ж нескінченності), коли її можна представити у вигляді $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина.

Приклад

$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$ оскільки $x+2=3+(x-1)$, $x-1$ в цьому випадку є нескінченно малою

4) Функція $f(x)$ тоді і тільки тоді має границею число A , якщо для довільної послідовності чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ з її області визначення послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ збігається до A . (означенням границі функції за Гейне)/

5) Сталий множник виноситься за знак границі:

Напр

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} (\alpha f(x)) = \alpha A, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) = A;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 \sin x) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 3 \cdot 0 = 0.$$

6) Границя алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} [f(x) \pm g(x)] = A + B, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} g(x) = B;$$

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow 0} (2^x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2^x + \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 + 1 = 2.$

7) Границя добутку дорівнює добутку границь:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B, \text{ якщо знову } \lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} g(x) = B;$$

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 \cdot \log(x + 8)) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \log(x + 8) = 4 \cdot 1 = 4.$

8) Границя частки дорівнює частці границь:

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{A}{B}, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) = A, \\ \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x) = B \neq 0;$$

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x + 2)} = \frac{0}{1} = 0$

9) Якщо $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \varphi(x) = u_0$, то границя складеної функції

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(\varphi(x)) = A$$

Наприклад: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 4^{\sin x} = 4^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$

1 0) Якщо в деякому околі точки x_0 (або при достатньо великих x) виконується нерівність $f(x) < g(x)$, то за умови існування границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} g(x).$$

Для нескінченно малих величин характерні наступні властивості:

- а) Алгебраїчна **сума** скінченної кількості **нескінченно малих** величин є величина **нескінченно мала**.
- б) **Добуток нескінченно малої** величини на **обмежену** (в тому числі на сталу або ж іншу нескінченно малу) є величина **нескінченно мала**.
- в) **Частка** від ділення **нескінченно малої** величини на величину, яка має **відмінну від нуля** границю, є величина **нескінченно мала**.
- г) Величина, **обернена до нескінченно малої** є **нескінченно велика** і навпаки – величина, **обернена до нескінченно великої** є **нескінченно мала**.

Примітні (важливі) границі

Першою примітною границею називається границя

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Її наслідками є границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = 1;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Приклади

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 * \operatorname{tg} 3x}{3 * 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{3x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x - \pi)}{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = t, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{4}, t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4t}{(2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4t}{(4t)^2} \cdot 16 = 4 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4t}{(4t)^2} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(4x - \pi)}{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)^2} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) * \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) * \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)} = 2 \end{aligned}$$

Другою примітною границею називається границя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Наслідки такої границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Приклад

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{2}{x}} \right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Нескінченно малі величини називаються

еквівалентними $(\alpha \sim \beta)$, якщо $\lim_{x \rightarrow 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ **або**

одного порядку малості, якщо $\lim_{x \rightarrow 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$

Якщо $\lim_{x \rightarrow 0(\infty)} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ то $\alpha(x)$ називається

нескінченно малою вищого порядку

малості в порівнянні з β .

У випадку, коли маємо добуток, або частку нескінченно малих величин, то при знаходженні границь кожна з них може бути заміненена **на еквівалентну**.

З першої та другої примітних границь
впливають наступні еквівалентності:

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0 (\infty)} u(x) = 0$, то:

1) $\sin u(x) \sim u(x);$

2) $\operatorname{tg} u(x) \sim u(x);$

3) $\arcsin u(x) \sim u(x);$

4) $\operatorname{arctg} u(x) \sim u(x);$

5) $1 - \cos u(x) \sim \frac{1}{2} u^2(x);$

6) $\log_a (1 + u(x)) \sim \frac{u(x)}{\ln a};$

7) $\ln(1 + u(x)) \sim u(x);$

8) $a^{u(x)} - 1 \sim u(x) \cdot \ln a;$

9) $e^{u(x)} - 1 \sim u(x);$

10) $(1 + u(x))^a - 1 \sim a \cdot u(x).$

Для нескінченно великих функцій корисно використовувати еквівалентність:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \sim a_0x^n \text{ при } x \rightarrow \infty$$

Неперервність та розриви функцій

Неперервною в точці $x=x_0$ є функція $y=f(x)$, якщо вона:

а) визначена в деякому околі цієї точки;

б) має скінченну границю $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

в) $A=f(x_0)$ (границя співпадає зі значенням функції);

неперервною на інтервалі $(a; b)$, якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу;

неперервною на відрізку $[a; b]$, якщо вона:

г) неперервна на інтервалі $(a; b)$;

д) має скінченні значення $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$;

е) мають місце рівності: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \beta$.

1) неперервність функції означає неперервність її графіка, тобто можливість зобразити його не відриваючи олівця від паперу;

2) функція неперервна тоді і тільки тоді, коли її приріст $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ прямує до нуля при $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо функція не є неперервною в точці x_0 , то точка x_0 називається **точкою розриву функції**.

Розрізняють наступні типи точок розриву:

- 1) **Усувний розрив**, коли існує границя $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, проте її значення не співпадає зі значенням $f(x_0)$ або ж останнє не існує;
- 2) **Розрив першого роду** (розрив типу «стрибок»), якщо границі $\lim_{x \rightarrow x-0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x+0} f(x)$ є не рівні між собою;
- 3) **Розрив другого роду**, якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x-0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x+0} f(x)$ нескінченна або не існує.

Приклад. Дослідити на розрив функцію $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ - точка розриву функції.

Обчислимо границі зліва і справа в точці $x=1$:

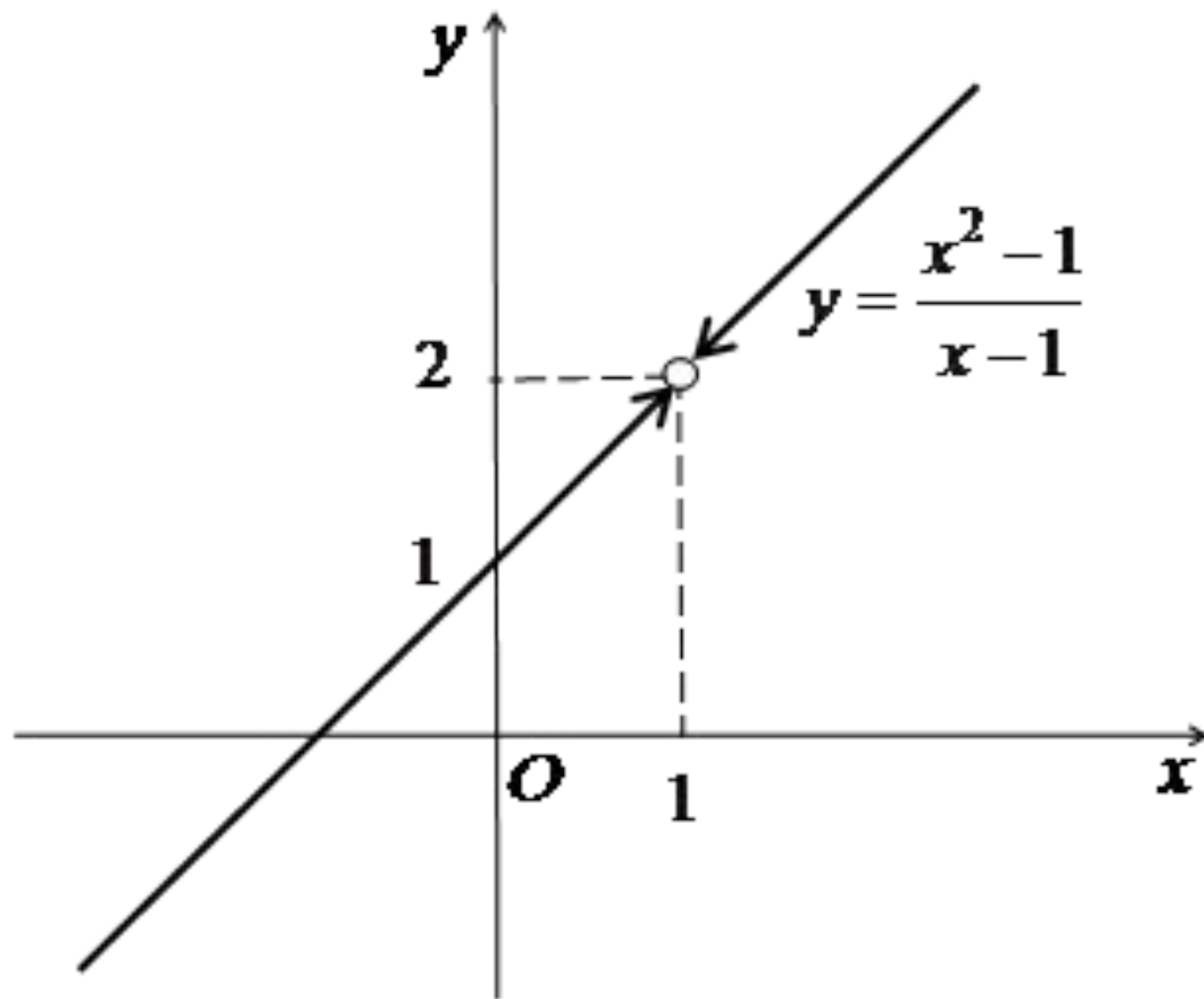
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x+1) = 2$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$, то точка $x=1$ є точкою усувного розриву.

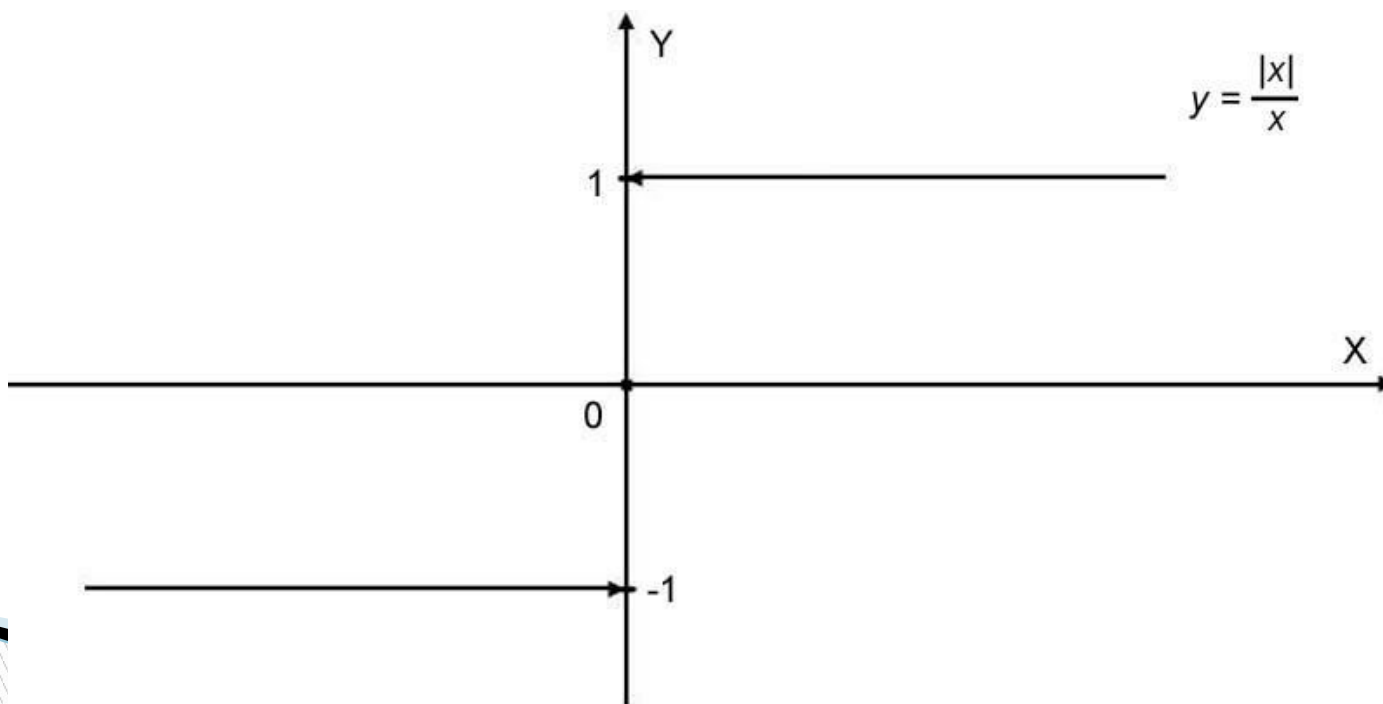
Отже маємо: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Схематичний графік зображено на наступному слайді.



Приклад

Функція $y = \frac{|x|}{x}$ має в точці $x = 0$ розрив першого роду («стрибок»), оскільки $\lim_{x \rightarrow 0-0} y = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = 1$ а значення самої функції в цій точці не визначене.



Приклад

Дослідити на розрив функцію $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$

Розв'язання. Оскільки $f(1)$ не існує, то $x=1$ - точка розриву функції.

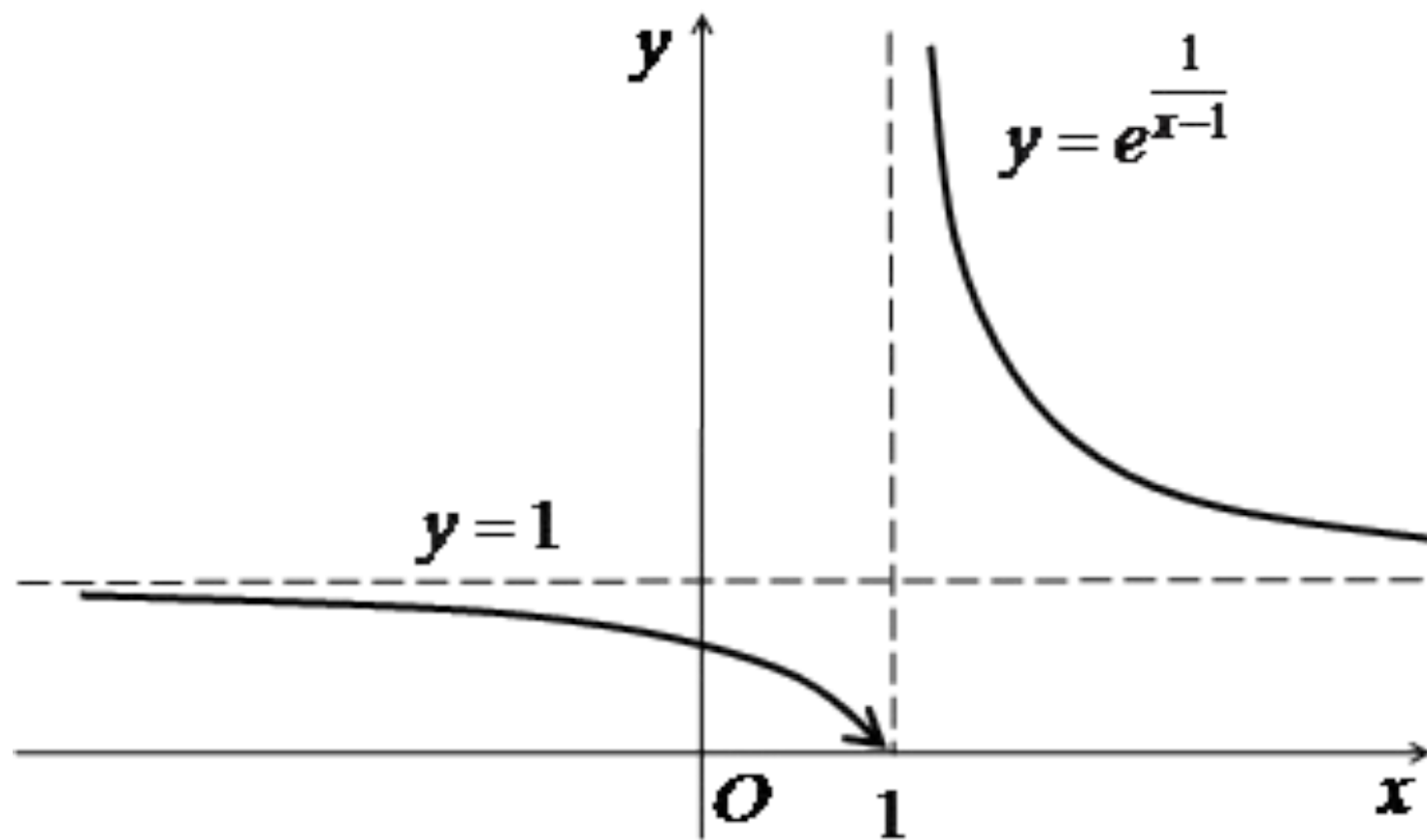
Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \text{ (оскільки } x \rightarrow 1-0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty, \text{ (оскільки } x \rightarrow 1+0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow +\infty).$$

Оскільки друга границя дорівнює $-\infty$ то точка $x=1$ точка розриву другого роду.

Графік наведено на наступному слайді.



Функції , неперервні в точці, мають наступні властивості:

- 1) Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці $x=x_0$, то їх алгебраїчна сума $f(x)+g(x)$, добуток $f(x)*g(x)$ та частка $f(x)/g(x)$ (при $g(x)\neq 0$) також неперервні в точці $x=x_0$.
- 2) Якщо $f(x)$ неперервна в точці $x=x_0$ та $f(x_0)>(<)0$, то існує такий окіл точки x_0 , в якому $f(x)>(<)0$.
- 3) Якщо функція $y=f(u)$ неперервна в точці u_0 , а функція $\phi(x)$ неперервна в точці $x=x_0$, $\phi(x_0) = u_0$ то складна функція $y=f(\phi(x))$ неперервна в точці $x=x_0$.

**Всі елементарні
функції неперервні в
усіх точках своєї
областей визначення.**

Функції, неперервні на проміжку $[a; b]$, мають наступні властивості:

- 1) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку, то вона обмежена на цьому проміжку.
- 2) Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку, то існують точки $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ в яких функція досягає своїх найменшого m та найбільшого M значень на цьому проміжку:
$$f(x_1)=m, \quad f(x_2)=M.$$
- 3) Якщо функція неперервна на відрізку $[a; b]$ і її значення на кінцях цього відрізка мають різні знаки, то на відрізку знайдеться точка x_0 така, що $f(x_0)=0$.

Біном Ньютона

Формулою бінома Ньютона *називають рівність*:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

де, a, b - дійсні числа.

$n=1, 2, 3, \dots$ - натуральне число.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad - \text{біноміальний коефіцієнт.}$$

$n!$ - факторіал числа n .

Справедливі такі співвідношення

$$1) \quad 0! = 1, 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, \dots;$$

$$2) \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!;$$

$$3) \quad C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^1 = n;$$

$$4) \quad C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$5) \quad C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

$$6) \quad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Приклади вирішення задач

Приклад 1. Знайти границі послідовностей.

$$1.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 5n + 7}$$

$$1.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}}$$

Розв'язок задачі 1.1.

Для розкриття заданої невизначеності типу $\{\infty/\infty\}$ виносимо в чисельнику та знаменнику вищу ступінь n . Після скорочення та врахування того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ за допомогою арифметичних дій над збіжними послідовностями, маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 5n + 7} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{3}{2}.$$

Розв'язання буде простішим, якщо врахувати,
що

$$a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_n \sim a_0 n^k \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

$$\text{бо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_n}{a_0 n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a_1}{a_0 n} + \dots + \frac{a_n}{a_0 n^k} \right) = 1.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 5n + 7} = \left| \begin{array}{l} 3n^2 + 4n + 1 \sim 3n^2 \\ 2n^2 - 5n + 7 \sim 2n^2 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2}.$$

Розв'язок задачі 1.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{4}{n}\right)}}{\sqrt[3]{n^3 \left(1 - \frac{3}{n}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{n \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}}} = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = \left| \begin{array}{l} n^2 + 4n \sim n^2 \\ n^3 - 3n^2 \sim n^3 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt[3]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Приклади по розкриттю невизначеностей

Приклад 1.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

Розв'язок прикладу 1.а.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}.$$

Підстановка граничного значення $x = 1$ призводить до невизначеності типу $\{0/0\}$. Розкладемо чисельник та знаменник на множники використовуючи **теорему Безу**: якщо a - корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$, то $P_n(x)$ ділиться на двочлен $(x-a)$ без залишку :

$$P_n(x) = (x - a) P_{n-1}(x)$$

$$\begin{array}{r}
 \tilde{O}^2 - 1 \quad | \quad \tilde{O} - 1 \\
 \hline
 \tilde{O}^2 - \tilde{O} \quad | \quad \tilde{O} + 1 \\
 \hline
 \tilde{O} - 1 \\
 \hline
 x - 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \tilde{O}^2 + 5\tilde{O} - 6 \quad | \quad \tilde{O} - 1 \\
 \hline
 \tilde{O}^2 - \tilde{O} \quad | \quad \tilde{O} + 6 \\
 \hline
 6\tilde{O} - 6 \\
 \hline
 6x - 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{2}{7}.$$

Розв'язок прикладу 1.в.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$$

Позбудемось ірраціональності в чисельнику,
помноживши чисельник і знаменник на $\sqrt{x^2 + 5} + 3$.

Далі в чисельнику скористаємось формулою
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, в знаменнику множник зам $\sqrt{x^2 + 5} + 3$
його значенням при $x = 2$. Отже, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(x - 2)(3 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2) \cdot 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2) \cdot 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Розв'язок прикладу 1.г.

Домножимо чисельник і знаменник на вирази, спряжені до чисельника і знаменника.

Скориставшись відповідними формулами $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-1) \cdot 3}{(1+x-1) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 3}{x \cdot 2} = \frac{3}{2}.$$

Розв'язок прикладу 1.г.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \left[\begin{array}{l} 1+x = t^6 \\ x \rightarrow 0, t \rightarrow 1 \\ \sqrt{1+x} = t^3 \\ \sqrt[3]{1+x} = t^2 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t^2 - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 + t + 1}{t+1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти границі заданих функцій.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{5x^2 - x - 4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x^3 + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)^2}{\sqrt[3]{x^6 + 1}};$$

Розв'язок прикладу 2.а.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{5x^2 - x - 4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(5 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 + 0 + 0}{5 - 0 - 0} = \frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{5x^2 - x - 4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \begin{array}{l} 2x^2 + x + 1 \sim 2x^2 \\ 5x^2 - x - 4 \sim 5x^2 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}.$$

Розв'язок прикладу 2.б.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x-3}{2x^3+4x+3} = \left| \begin{array}{l} 10x-3 \sim 10x \\ 2x^3+4x+3 \sim 2x^3 \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

Розв'язок прикладу 2.в.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \begin{array}{l} 2x^5 + 3x^3 - 4x \sim 2x^5 \\ 3x^2 - 4x + 2 \sim 3x^2 \\ x \rightarrow -\infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{3} = \frac{-\infty}{3} = -\infty.$$

Розв'язок прикладу 2.г.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} \sim \sqrt{x^2} = x \\ \sqrt[3]{x^6+1} \sim \sqrt[3]{x^6} = x^2 \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)^2}{x^2} = 4$$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!