Иррациональные уравнения

Алгебра 10

ГОУ СОШ № 413 Петродворцового района Санкт-Петербурга
Учитель: Оленникова Т.Н.

План урока

1. Историческая справка
2. Определение иррационального уравнения
3. Уравнения, содержащие корень нечетной степени.
4. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$
5. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
6. Замена переменных
7. Задания для самостоятельной работы
8. Домножение на сопряженное выражение

Историческая справка

- **Название «радикал» происходит от латинских слов radix – «корень», radicalis -- «коренной». Начиная с XIII в. европейские математики обозначали корень этим словом, или, сокращенно, r.**
- **В 1525г в книге К. Рудольфа «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс» появилось обозначение V для знака квадратного корня, корень кубический обозначался там, как ▼▼▼.**

Историческая справка (продолжение)

- В **1626г** голландский математик **А.Жирар** ввел обозначение $\overset{2}{V}, \overset{3}{V}$ и т.д., которое стало быстро вытеснять **знак r**; при этом над подкоренным выражением ставилась **горизонтальная черта.**

  Тогда писали $V\,\overline{x+y}$ вместо $\sqrt{x+y}$ современного.

- Современное обозначение корня впервые появилось в книге **Р. Декарта «Геометрия»**, изданной в **1637г.**

Иррациональные уравнения

- **Иррациональным называется уравнение, в котором переменная входит под знаком корня (радикала).**
- **Например:**

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$$

$$\sqrt[4]{4x^3+8x^2-5x}=2x-1$$

$$\sqrt[3]{x-1}=x-1$$

$$2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени.

- Решая уравнения, содержащие корень нечетной степени, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения в соответствующую степень.
- Примеры. Решить уравнение.

$$\sqrt[3]{x+3} = 2$$

Возведём обе части в куб, получим

$$x + 3 = 8, \qquad x = 5$$

Ответ: $x = 5$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени (продолжение)

Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-1} = x-1$

Возведём обе части в куб, получим:

$$x-1=(x-1)^3$$

$$(x-1)^3-(x-1)=0$$

$$(x-1)((x-1)^2-1)=0$$

$$(x-1)(x-2)x=0$$

$$x=1,\ \ x=2,\ \ x=0$$

Ответ: 0, 1, 2

I. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- В ОДЗ левая часть уравнения всегда неотрицательна – поэтому решение может существовать только тогда, когда $g(x) \geq 0$.
- В этом случае обе части уравнения неотрицательны, возведение в квадрат даёт равносильное в ОДЗ уравнение. Мы получаем, что

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

ПРИМЕРЫ

1) **Решить уравнение** $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-9x+5}=x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x+5=x^2-6x+9 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\ge 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

$$Ответ:\ x=4$$

ПРИМЕРЫ

2) Решить уравнение $\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=2x-1$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+8x^2-5x=(2x-1)^2 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+4x^2-x-1=0 \\ 2x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x^2-1)=0 \\ x\ge 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm 0,5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x\ge 0,5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0,5$ Ответ: $x = 0,5$

II. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

- В ОДЗ обе части неотрицательны и при возведении в квадрат дает равносильное уравнение

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

- При таком способе решения достаточно проверить неотрицательность одной из функций – можно выбрать более простую.

ПРИМЕРЫ

1) Решить уравнение $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1}$

- **Воспользуемся условием равносильности (1):**

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ x^2+x-1=2x^3-4x^2+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ 2x^3-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2,5 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2,5$$

Ответ: $x=2,5$

2) Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{x^3+x^2-3x+2}=\sqrt{8+2x-x^2}$$

- **Воспользуемся условием равносильности (1):**

$$\sqrt{x^3+x^2-3x+2}=\sqrt{8+2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+2x-x^2\ge 0 \\ x^3+x^2-3x+2=8+2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-2x-8\le 0 \\ x^3+2x^2-5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0 \\ (x+1)(x^2+x-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0 \\ (x+1)(x+3)(x-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: Произведение корней равно - 2

III. Замена переменных.

Решить уравнение 1. $\dfrac{3}{1+\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x+1} = 5$

- Пусть $\sqrt{x+1} = t \geq 0\ (*)$

получим уравнение $\dfrac{3}{1+t} + 2t = 5$

$3 + 2t^2 + 2t = 5t + 5, \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0,$

$t = 2, \; t = -0,5$

Значит $\sqrt{x+1} = 2, \; x = 2^2 - 1 = 3$

$\sqrt{x+1} = -0,5,$ решений нет.

Ответ: $x = 3.$

Замена переменных

Решить уравнение 2. $\sqrt{x+3-\sqrt{x+1}}-1=\sqrt{x-4+\sqrt{x+1}}$

- **Замена:** $\sqrt{x+1}=t\geq 0\,(*)$ **, тогда** $x=t^2-1$

$\sqrt{t^2-1+3-t}-1=\sqrt{t^2-1-4+t}$ **, т.е.** $\sqrt{t^2-t+2}=\sqrt{t^2+t-5}+1$

Обе части неотрицательны, возведём в квадрат и получим равносильное уравнение

$$t^2-t+2=t^2+t-5+2\sqrt{t^2+t-5}+1$$

$$6-2t=2\sqrt{t^2+t-5}\quad |:2$$

$3-t=\sqrt{t^2+t-5}$, $\;3-t\geq 0$ **и учитывая (*):** $0\leq t\leq 3$

$9-6t+t^2=t^2+t-5$, $\;t=2$

$\sqrt{x+1}=2$, $\;x+1=4$, $\;x=3$ **Ответ:** $x=3$

Решить самостоятельно уравнения

- 1. $\sqrt[3]{x(x+2)} = x$
- 2. $\sqrt{3x-2} = 4 - x$
- 3. $\sqrt[6]{4-4x-x^2} = 2$
- 4. $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{6-3x}$
- 5. $\sqrt{3x+1} = x - 1$
- 6. $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$
- 7. $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$

Ответы:

- 1, 0, 2

2

- 6, 10

- 2

5

1

4

Решить самостоятельно уравнения

- **8.** $\sqrt{2x^2-4x-1}-\sqrt{x^2-2x-1}=1$

  Замена : $\sqrt{x^2-2x-1}=t\geq 0\ (*)$

  тогда $2x^2-4x=2t^2+2$

  Ответ : $x=1\pm\sqrt{2},\quad x=1\pm\sqrt{6}$

- **9.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{4}{3}$

  Замена : $x=\sin\alpha,\ где\ -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

  тогда $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$

  Ответ: $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

Домножение на сопряженное выражение

- **Решить уравнение**

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+10} - 4 \quad (1)$$

ОДЗ: $x \geq -1$

а) $\sqrt{x+1} - 1 = 0$

$$\sqrt{x+1} = 1$$

x = 0 - не является корнем иск. ур-я (1)

Домножение на сопряженное выражение (продолжение)

б) Домножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+1}-1$, получим

$$\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}+3=\sqrt{x+10}$$

Обе части неотрицательны, возведём в квадрат и получим равносильное уравнение

$x+1+9+6\sqrt{x+1}=x+10$ $\quad 6\sqrt{x+1}=0$ $\quad x=-1$

Ответ: $x=-1$