Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Мехатронные системы»

Курс «Механика роботов и мехатронных модулей»

Тема «Кинематический анализ и синтез механизмов»

Автор Зубкова Ю.В., к.т.н., доцент кафедры «Мехатронные системы»

Ижевск
2017

Основные понятия и определения

Кинематический анализ механизма - исследование его основных параметров с целью изучения законов изменения и на основе этого выбор из ряда известных наилучшего механизма.

Целью кинематического анализа является определение кинематических характеристик (траекторий, скоростей и ускорений характерных точек его звеньев) без учёта сил, вызывающих это движение.

При этом решают в основном **три задачи**:

1) определение перемещений звеньев и траекторий заданных точек;

2) определение скоростей точек звеньев и угловых скоростей звеньев;

3) определение ускорений точек звеньев и угловых ускорений звеньев.

Основные понятия и определения (продолжение)

Зависимость линейных координат в какой-либо точке механизма от обобщенной координаты – **линейная функция положения данной точки в проекциях на соответствующие оси координат**.

$$X_c = f(\phi_1)$$

Зависимость угловой координаты какого-либо звена механизма от обобщенной координаты – **угловая функция положения данного звена.**

$$\phi_2 = f(\phi_1)$$

•

$$\frac{dx_c}{d\varphi_1} = V_{qcx} \qquad \frac{dy_c}{d\varphi_1} = V_{qcy} \qquad \frac{dx_c}{dt} \cdot \frac{dt}{\varphi_1} = V_{qcx} \qquad \frac{dx_c}{dt} = V_c \qquad \frac{V_{cx}}{\omega_1} = V_{qcx} \qquad \frac{dt}{\varphi_1} = \omega_1$$

$$V_{cx} = \omega_1 \cdot V_{qcx} \qquad V_{cy} = \omega_1 \cdot V_{qcy}$$

Полная скорость т. С будет

$$V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2}$$

Основные понятия и определения (продолжение)

Первая производная угловой функции положения звена по обобщенной координате – **передаточное отношение**

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = u_{2-1} \qquad \Big| \cdot \frac{dt}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = u_{2-1}$$

Вторая производная линейной функции положения по обобщенной координате – **аналог линейного ускорения точки в проекциях на соответствующие оси**

$$\frac{d^2 x_c}{d\varphi_1^2} = a_{qcx} \qquad \frac{d^2 y_c}{d\varphi_1^2} = a_{qcy}$$

Задание: Запишите самостоятельно выражение аналога углового ускорения.

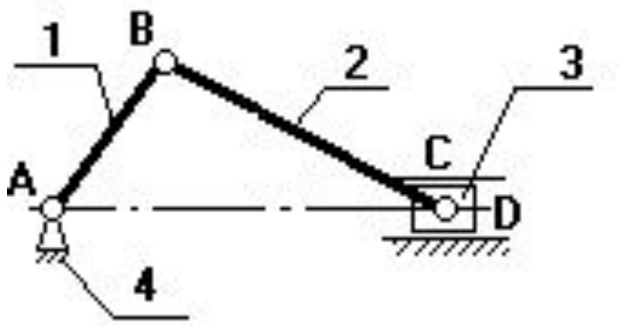
Основные кинематические характеристики механизмов

1. **Вид движения**
2. **Перемещение** и **траектория**
   - угловые, φ, рад
   - линейные, S, м

3. **Скорость** (быстрота изменения перемещения во времени)
   - угловая, $\omega = d\varphi/dt$, рад/с = 1/с
   - линейная, $v = dS/dt$, м/с

4. **Ускорение** (быстрота изменения скорости во времени)
   - угловое, $\varepsilon = d\omega/dt$, рад/с^2 = 1/с^2
   - линейное, $a = dV/dt$, м/с^2

Движение любого звена может быть **периодическим** и **апериодическим**



Время цикла $T = 60/n = 2\pi/\omega$, с,

где n – частота вращения кривошипа

ω – угловая скорость, 1/с

Кинематический анализ пространственного механизма

Первая и основная задача кинематики - определение функции положения.

Для пространственных механизмов наиболее эффективные методы решения:
- **векторный метод** (рычажные механизмы)
- **метод преобразования координат** (манипуляторы)

Кинематический анализ механизма проводят без учета сил, вызывающих его движение, **аналитическим** или **графическим** методом.

Аналитический метод позволяет установить в виде математического уравнения зависимость кинематических параметров механизма от размеров звеньев.

Графический метод, более простой, основан на непосредственном геометрическом построении планов положений механизма (наглядность).

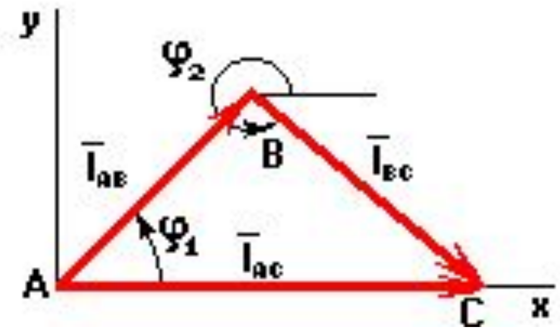
Аналитический способ определения кинематических параметров рычажных механизмов

Пример: кривошипно-ползунный механизм

Дано: ω_1, l_{AB}, l_{BS2}, l_{BC}, l_{AC}

Определить: v_i, a_i, ω_2, ε_2.

Условие замкнутости данного контура:



$$\bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BC} = \bar{l}_{AC} \qquad (1)$$

$$l_{AB} \cdot \cos\varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos\varphi_2 = x_C \qquad (2)$$

$$l_{AB} \cdot \sin\varphi_1 - l_{BC} \cdot \sin\varphi_2 = \underbrace{y_C}_{=0} \qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{l_{AB} \cdot \sin\varphi_1}{l_{BC}}\right) \qquad (4)$$

Продифференцируем (3) по обобщенной координате:

$$l_{AB} \cdot \cos\varphi_1 + l_{BC} \cdot \cos\varphi_2 \cdot \underbrace{\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}}_{=u_{2-1}} = \underbrace{y_{qcy}}_{=0} \qquad \frac{l_{AB} \cdot \cos\varphi_1}{l_{BC} \cdot \cos\varphi_2} = u_{2-1} \qquad (5)$$

Аналитический способ определения кинематических параметров рычажных механизмов (продолжение)

Продифференцируем (2) по обобщенной координате:

$$-l_{AB}\cdot\sin\varphi_1 - l_{BC}\cdot\sin\varphi_{21}\cdot\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = V_{qcx}$$

$$V_{cx} = \omega_1\cdot V_{qcx}$$

$$V_{cy} = \omega_1\cdot V_{qcy} = 0$$

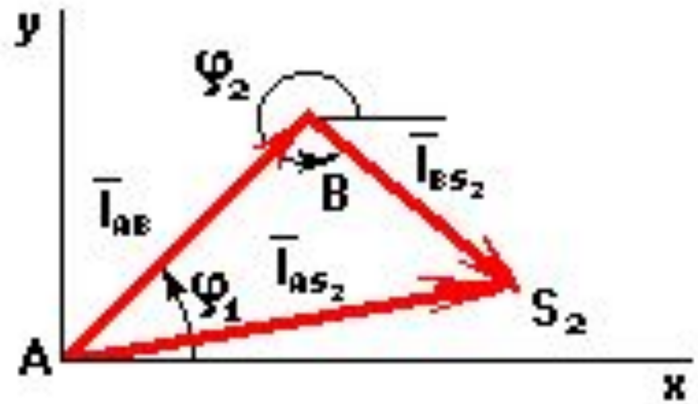
$$V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2}$$

Условие замкнутости данного векторного контура имеет вид:

$$\bar{l}_{AB} + \bar{l}_{BS_2} = \bar{l}_{AS_2} \qquad (6)$$

$$l_{AB}\cdot\cos\varphi_1 + l_{BS_2}\cdot\cos\varphi_2 = x_{S_2} \qquad (7)$$

$$l_{AB}\cdot\sin\varphi_1 - l_{BS_2}\cdot\sin\varphi_2 = y_{S_2}$$



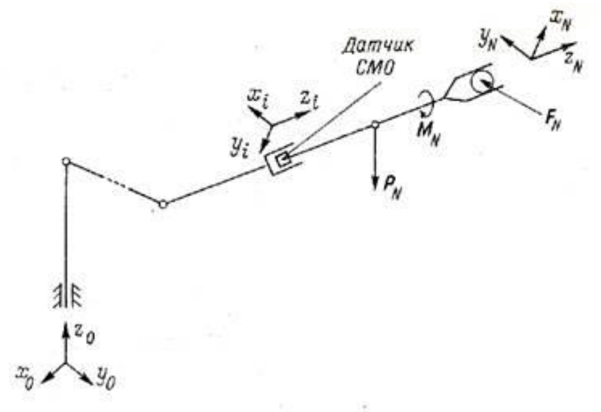
Продифференцировав (7) по обобщенной координате:

$$V_{s_2x} = \omega_1\cdot V_{qs_2x}$$

$$V_{s_2y} = \omega_1\cdot V_{qs_2y} \qquad (8)$$

$$V_{s_2} = \sqrt{V_{s_2x}^2 + V_{s_2y}^2}$$

Кинематический анализ манипулятора



Целью кинематического анализа манипулятора является определение положения, скорости и ускорения произвольной точки звена исполнительного механизма - схвата - в различных системах координат.

Прямая задача

Найти **закон изменения абсолютных координат выходного звена** по заданным законам изменения относительных или абсолютных координат звеньев.

Обратная задача

По заданному закону движения схвата найти **законы изменения координат звеньев**, обычно, линейных или угловых перемещений в приводах.

Задачи кинематики

Первая и основная задача кинематики - определение функции положения.

Методы решения для пространственных механизмов:

- векторный метод
- метод преобразования координат (метод Денавита и Хартенберга)

Два вида **матриц**:

- матрицы ***M,*** определяющие отношение между системами координат соседних звеньев;
- матрицы ***T,*** определяющие положение и ориентацию каждого звена механизма в неподвижной или базовой системе координат.

Матрица перехода из *i*-ой системы координат в (*i*-1)-ю:

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\varphi_i & \sin\varphi_i \cdot \sin\theta_i \cdot & a_i \cdot \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\theta_i \cdot \cos\varphi_i & -\cos\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \sin\varphi_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Метод Денавита и Хартенберга

Оси координат располагаются по следующим правилам:

- Для звена *i* ось z_i направляется по оси кинематической пары, образуемой им со звеном *(i+1)*. Начало координат размещают в геометрическом центре этой пары.
- Ось x_i направляется по общему перпендикуляру к осям z_{i-1} и z_i с направлением от z_{i-1} к z_i. Если оси z_{i-1} и z_i совпадают, то x_i перпендикулярна к ним и направлена произвольно. Если они пересекаются в центре кинематической пары, то начало координат располагается в точке пересечения, а ось x_i направляется по правилу векторного произведения (кратчайший поворот оси z_i до совмещения с z_{i-1} при наблюдении с конца x_i должен происходить против часовой стрелки).
- Ось y_i направляется так, чтобы система координат была правой.

Прямая задача кинематики о положениях решается с помощью следующей формулы:

$$R_0 = T_n \cdot R_n$$

где T_n - матрица, равная произведению матриц M_i:

$$T_n = M_1 M_2 \ldots M_n$$

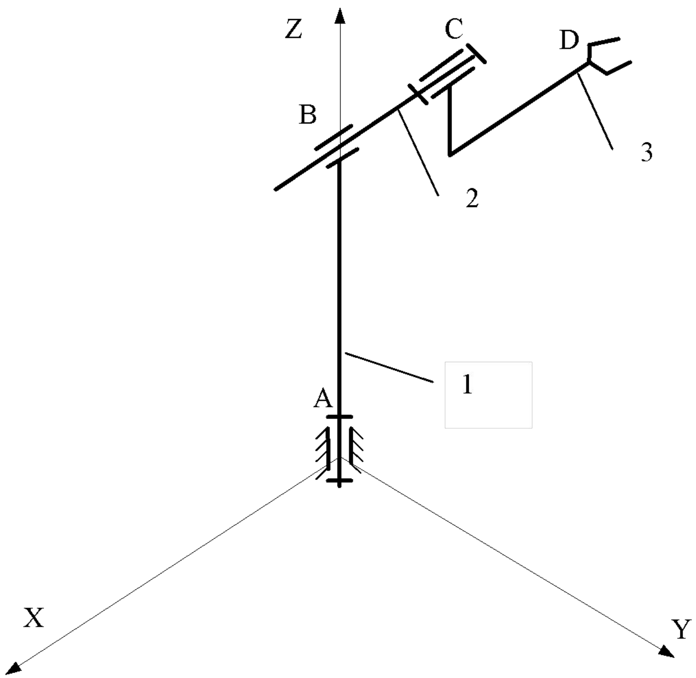
Метод Денавита и Хартенберга (продолжение)

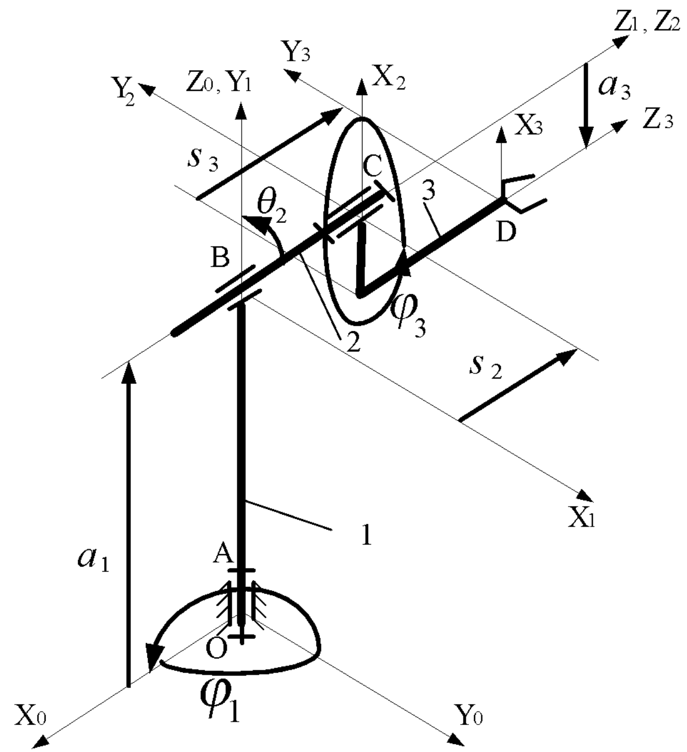
Согласно принятому методу, каждый переход включает в себя **последовательность четырех движений**: двух поворотов и двух параллельных переносов, осуществляемых в указанной последовательности:

- поворот вокруг оси z_{i-1} на угол , до тех пор, пока ось x_i не станет параллельной оси x_{i-1} (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора z_{i-1} против часовой стрелки);
- перенос вдоль оси x_i на величину $-a_i$ до совмещения начала системы координат O_i с точкой пересечения осей x_i и z_{i-1} (отсчет по оси x_i от точки пересечения оси x_i и оси z_{i-1});
- перенос вдоль оси z_{i-1} на величину $-s_i$, после которого начало системы координат O_i оказывается в начале координат O_{i-1} системы $(i-1)$ (отсчитывается по оси z_{i-1} от ее начала координат O_{i-1} до точки ее пересечения с осью x_i);
- поворот i-ой системы вокруг оси x_i на угол до параллельности осей z_i и z_{i-1} (положительное направление поворота при наблюдении с конца вектора x_i против часовой стрелки).

Пример решения прямой задачи кинематики

Дана кинематическая схема трехзвенного манипулятора





Новая кинематическая схема, учитывающая изменение ориентации систем координат звеньев.

Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Угол θ_1 = 90°

$a_1 = L_1$

$S_2 = L_2 + r_{23}$

$$a_3 = L_3^{'}$$

$$s_3 = L_3$$

Тип и параметры кинематических пар

Кинематическая пара	Тип пары	Номер звена	Параметры			
			φ_i, град	s_i, м	a_i, м	θ_i, град
0,1	В	1	φ_{01}	-	L_1	90
1,2	П	2	-	$L_2 + r_{23}$	-	-
2,3	В	3	φ_{23}	L_3	$L_3^{'}$	-

Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Матрицы перехода их системы *O*i в систему *O*i-1 (в общем виде):

$$M_i = M_i^{\theta} \cdot M_i^{a} \cdot M_i^{s} \cdot M_i^{\varphi}$$

$$M_i^{\theta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица поворота вокруг оси x_i на угол $-\theta_i$,

$$M_i^{a} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица переноса вдоль оси x_i на $-a_i$,

$$M_i^{s} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица переноса вдоль оси z_{i-1} на $-s_i$,

$$M_i^{\varphi} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & 0 \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица поворота вокруг оси z_{i-1} на угол $-\varphi_i$.

Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Расширенные матрицы перехода для каждого из сочленений, с учетом значений приведенных в таблице (слайд 14):

$$M_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{01} & 0 & \sin\varphi_{01} & L_1 \cdot \cos\varphi_{01} \\ \sin\varphi_{01} & 0 & -\cos\varphi_{01} & L_1 \cdot \sin\varphi_{01} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 + r_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{23} & \sin\varphi_{23} & 0 & L_3^{'} \cdot \cos\varphi_{23} \\ \sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{23} & 0 & L_3^{'} \cdot \sin\varphi_{23} \\ 0 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вектор-столбец значений R3:

$$R_3 = \begin{vmatrix} L_1 + L_3^{'} \cdot \cos\varphi_{23} \\ L_3^{'} \cdot \sin\varphi_{01} \cdot \sin\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{01} \cdot (L_2 + L_3 + r_{23}) \\ 1 \end{vmatrix}$$

Координаты положения схвата манипулятора для общего положения с учетом системы координат, м:

$$R_3 = \begin{vmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4,25 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Положение некоторой произвольной точки *M* в системе координат звена *i* определяется вектором r_{Mi}, а в системе координат звена *(i-1)* - вектором r_{Mi-1}.

, $$\bar{r}_{Mi-1} = M_i \cdot \bar{r}_{Mi}$$

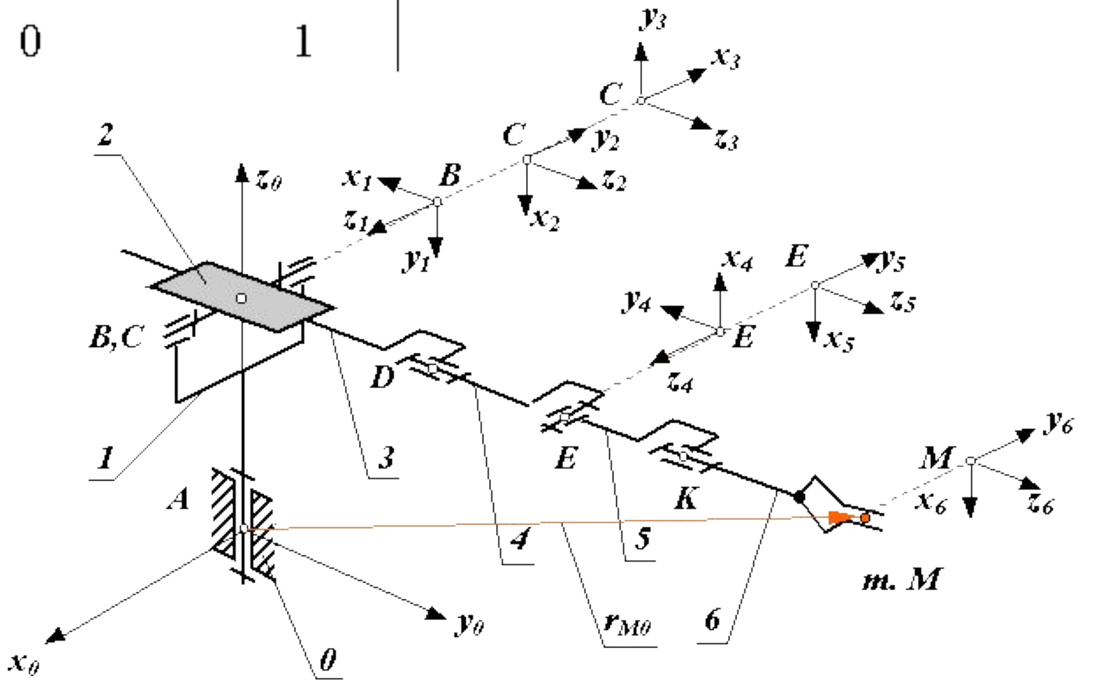
где

$$M_i = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -\cos\theta_i \cdot \sin\varphi_i & \sin\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \cos\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\theta_i \cdot \cos\varphi_i & -\cos\varphi_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \sin\varphi_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- матрица перехода из ***i***-ой системы координат в ***(i-1)***-ю

Шестизвенный манипулятор в начальном положении

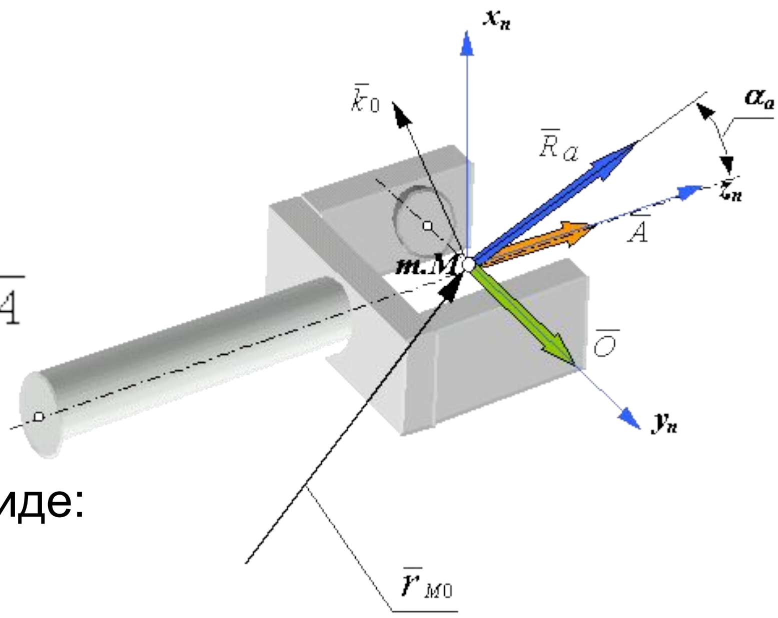
$$\bar{r}_{M0} = T_i \cdot \bar{r}_{Mi}$$



Пример решения прямой задачи кинематики (продолжение)

Положение выходного звена манипулятора определяется матрицей ***Tn***:

$$\bar{r}_{M0} = T_n = T_6$$



Углом подхода схвата *α* называется угол между вектором подхода и базовым вектором $\bar{A}$

$$R_\alpha = (\bar{O} \times \bar{k}_0)$$

Тогда матрица ***Tn*** может быть представлена в виде:

$$T_n = \begin{vmatrix} (\bar{O} \times \bar{A})_x & O_x & A_x & r_{nMx} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_Y & O_y & A_y & r_{nMy} \\ (\bar{O} \times \bar{A})_Z & O_z & A_z & r_{nMz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В механизме с ***n -*** подвижностями в общем виде функцию положения схвата можно записать так:

$$\bar{r}_{OM} = T_n \cdot \bar{A} = \bar{\Pi}(q_1, q_2, \dots q_n),$$

Кинематический анализ. Прямая задача

Необходимо определить линейные и угловые скорости и ускорения схвата при заданных угловых и линейных обобщенных скоростях и ускорениях.

Решение прямой задачи кинематики для точки *M* схвата можно получить продифференцировав четвертый столбец матрицы ***Tn*** по времени:

$$r_{nM} = \begin{vmatrix} r_{nMx} \\ r_{nMy} \\ r_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad V_{nM} = \frac{dr_{nM}}{dt} = \begin{vmatrix} V_{nMx} \\ V_{nMy} \\ V_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix}; \qquad a_{nM} = \frac{d^2 r_{nM}}{dt^2} = \begin{vmatrix} a_{nMx} \\ a_{nMy} \\ a_{nMz} \\ 1 \end{vmatrix};$$

Угловая скорость схвата:

$$\overline{\omega}_n = \sum_{i=1}^{m} \overline{k}_{i-1} \cdot \omega_{i,i-1},$$

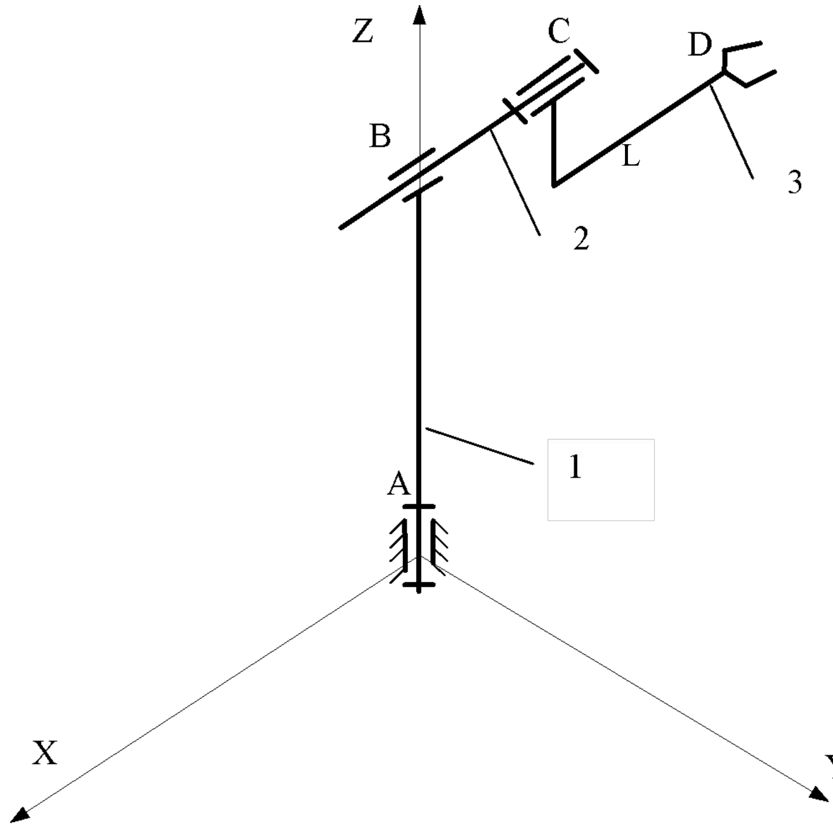
Дифференцируя это выражение по времени, получим формулу для определения **углового ускорения** схвата:

$$\overline{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{m} \overline{k}_{i-1} \cdot \varepsilon_{i,i-1} + \sum_{j=2}^{m} \left[\left(\sum_{k=l-1}^{m-1} \overline{k}_{k-1} \cdot \omega_k \right) \times \left(\overline{k}_{j-1} \cdot \omega_j \right) \right].$$

Зона обслуживания манипулятора

***Зона обслуживания манипулятора* -** часть пространства, соответствующая множеству возможных положений центра схвата манипулятора.

Звено	Длина, м		Угол поворота, град		Перемещение, мм	
	L	L'	Общ	Расч	Общ	Расч
1	2		360	-		
2	1,75				1,3	-
3	1,2	0,5	360	-		



Зона обслуживания манипулятора (продолжение)

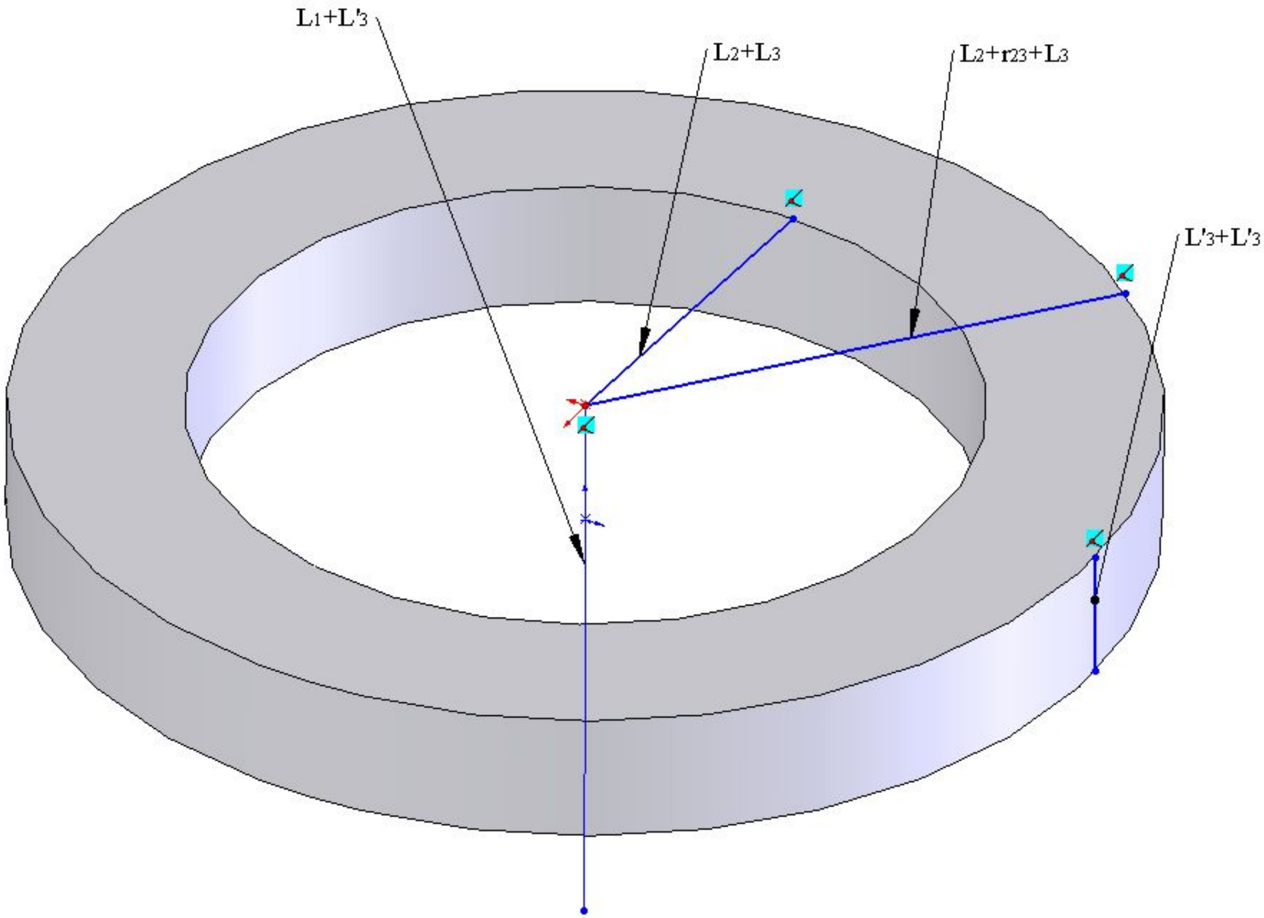
Координаты крайних положений схвата манипулятора с экстремальными значениями обобщенных координат

№ точки	Параметры			Координаты звена		
	φ_{01}, град	r_{12} , м	φ_{23} , град	X, м	Y, м	Z, м
1	0	0	0	-2,95	0	1,5
2	0	0	180	2,95	0	2,5
3	0	1,3	0	-4,25	0	1,5
4	0	1,3	180	4,25	0	2,5
5	180	0	0	-2,95	0	1,5
6	180	0	180	2,95	0	2,5
7	180	1,3	0	-4,25	0	1,5
8	180	1,3	180	4,25	0	2,5

Обобщенный параметр второго звена $r_{23} = 1,2$

Длина плеча третьего звена $l'_3 = 0,5$

Зона обслуживания манипулятора (продолжение)



Зона обслуживания трехзвенного манипулятора

Графический метод решения задач кинематики

Графический метод основан на непосредственном **геометрическом построении планов** положений (скоростей, ускорений) механизма.

Сущность метода:

- Параметры движения и схемы механизмов изображаются на чертежах условно при помощи масштабов.
- Графически может быть отображена любая величина (длина, скорость, ускорение, сила и т.д.).
- Применяется так называемый **вычислительный масштаб**

Например, **масштабный коэффициент длины АВ** равен

$$\mu = \frac{L_{AB}}{ab}\frac{(м)}{(мм)}$$

Метод построения планов скоростей и ускорений

Метод построения планов скоростей и ускорений базируется **на теоремах Архимеда**: скорость (ускорение) абсолютного движения точки представляют собой геометрическую сумму переносного (поступательного) и относительного (вращательного) движения:

$$\overline{V}_{ABC} = \overline{V}_{ПЕР} + \overline{V}_{OTH}$$

$$\overline{a}_{ABC} = \overline{a}_{ПЕР} + \overline{a}_{OTH} = \overline{a}_{ПЕР} + \overline{a}^{n}_{OTH} + \overline{a}^{\tau}_{OTH}$$

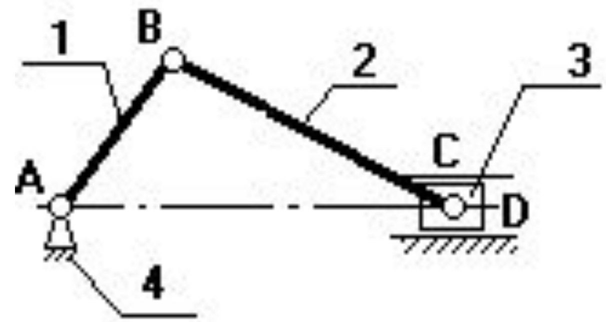
Исходные данные для решения задачи:

- кинематическая схема манипулятора;
- размеры звеньев механизма;
- величина и направление скорости ведущего звена.

Допущения:

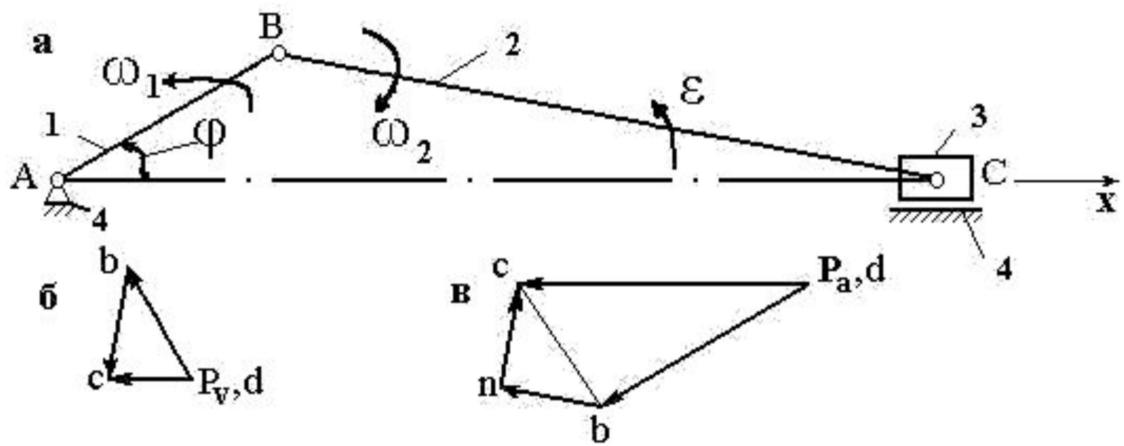
- звенья механизма считаем абсолютно жесткими;
- зазоры в кинематических парах отсутствуют.

Графический метод решения задач кинематики



Дано:
- Схема КПМ
- Размеры его звеньев L_{AB} и L_{BC},
- Угловая скорость кривошипа $\omega_1 = \text{const}$

<u>Кинематический расчет механизма (построение планов скоростей и ускорений)</u>



$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$ $\quad V_{BA} = \omega_1 \cdot l_{BA}$ $\quad \overline{V}_{CB} \perp CB,$ $\quad \overline{V}_D = 0,$ $\quad \overline{V}_{CD} \parallel Cx.$ $\quad V_C = P_v C \cdot \mu_v$

Графический метод решения задач кинематики (продолжение)

Векторное выражение ускорения точки B:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^{n}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA},$$

где $\bar{a}^{n}_{BA} \parallel BA$, $\bar{a}^{\tau}_{BA} \perp BA$, $a^{n}_{BA} = \omega_1^2 \cdot l_{BA}$, $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_1 \cdot l_{BA} = 0$, так как ω_1=const.

Ускорение точки C получим в результате графического решения следующих векторных уравнений:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}^{n}_{CB} + \bar{a}^{\tau}_{CB},$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}^{n}_{CD} + \bar{a}^{\tau}_{CD},$$

где $a^{n}_{CB} = V^2_{CB} / l_{CB}$, $a^{n}_{CB} \parallel CB$, $a^{\tau}_{CB} \perp CB$, $a_D = 0$, $a^{\tau}_{CD} = 0$, $a^{n}_{CD} \parallel Cx$.

$P_a b = a^{n}_{BA} / \mu_a$ $\quad bn = a^{n}_{CB} / \mu_a,$ $\quad a_c = P_a c \cdot \mu_a,$ $\quad a^{\tau}_{CB} = nc \cdot \mu_a.$

$$\varepsilon_2 = a^{\tau}_{CB} / l_{CB}$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях

Определение абсолютных величин линейных скоростей и ускорений точек звеньев манипулятора и абсолютных угловых скоростей и ускорений звеньев, при заданных относительных величинах.

$X_0Y_0Z_0$ - базовая система координат

Тензорно-матричный метод

Таблица расчётных данных

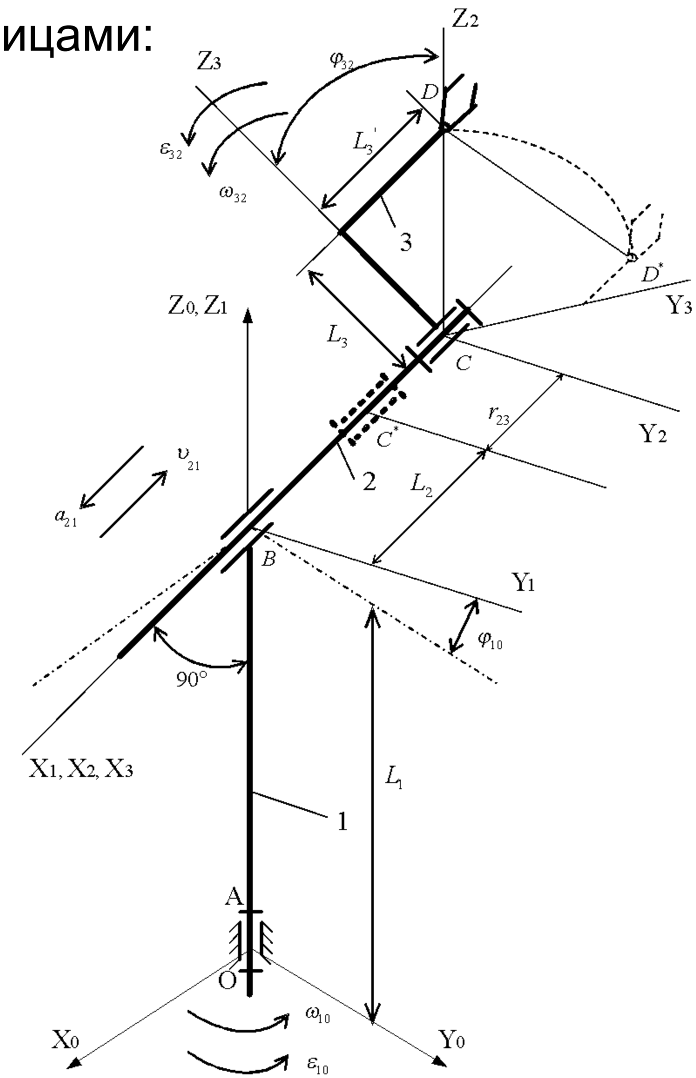
Звено	Длина, м		Угол поворота, град		Перемещение, мм		ε, с$^{-2}$	ω, с$^{-1}$	a, м/с^2	v, м/с
	L	L'	Общ	Расч	Общ	Расч				
1	0,5		-	30			0,2	0,5		
2	0,4				-	0,1			0,1	0,5
3	0,1	0,1	-	60			0,2	0,5		

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Определение угловых скоростей и ускорений

Проекции единичных векторов описываются матрицами:

$$e_A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \; e_C = \begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} \\ \sin\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8660 \\ 0,5000 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$



Для звена 1 векторы угловой скорости и углового ускорения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix} \\ \varepsilon_1 &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,2000 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Относительные кинематические параметры трехзвенного манипулятора

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Для звена 2 угловая скорость и ускорение:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{21};\\ &\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_{21},\end{aligned}\right\}$$

а так как $\bar{\omega}_{21} = 0$ *и* $\bar{\varepsilon}_{21} = 0$, то получим $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1$, $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_1$.

Векторы относительной угловой скорости и относительного углового ускорения (закон вращения звена 3 относительно звена 2):

$$\bar{\omega}_{32} = \bar{e}_C \left|\omega_{32}\right|; \ \bar{\varepsilon}_{32} = \bar{e}_C \left|\varepsilon_{32}\right|,$$

а соответствующие им матрицы записываются в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\omega_{32} = \begin{vmatrix}\omega_{32}\cos\varphi_{10}\\ \omega_{32}\sin\varphi_{10}\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0,4330\\ 0,2500\\ 0,0000\end{vmatrix}\\ &\varepsilon_{32} = \begin{vmatrix}\varepsilon_{32}\cos\varphi_{10}\\ \varepsilon_{32}\sin\varphi_{10}\\ 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0,1730\\ 0,1000\\ 0,0000\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}.$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Векторные уравнения угловой скорости и углового ускорения третьего звена:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}_3 &= \overline{\omega}_2 + \overline{\omega}_{32} = \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_{32} \\ \overline{\varepsilon}_3 &= \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\varepsilon}_{32} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_{32} = \overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_{32} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_{32} \end{aligned}\right\}$$

В эти уравнения входит векторное произведение $\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_{32}$, которое, как и произведение любых двух векторов , описываемых матрицами

$$a_n = \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{vmatrix} \text{ и } a_m = \begin{vmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{vmatrix},$$

в общем виде превращается в вектор с матрицей:

$$a_n \times a_m = \begin{vmatrix} y_n z_m - z_n y_m \\ z_n x_m - x_n z_m \\ x_n y_m - y_n x_m \end{vmatrix}$$

Таким образом, матрица-столбец вектора:

$$\omega_2 \times \omega_{32} = \begin{vmatrix} -\omega_{10}\omega_{32}\sin\varphi_{10} \\ \omega_{10}\omega_{32}\cos\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,1250 \\ 0,2165 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы угловой скорости и углового ускорения третьего звена:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_3 &= \begin{vmatrix} \omega_{32}\cos\varphi_{10} \\ \omega_{32}\sin\varphi_{10} \\ \omega_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,4330 \\ 0,2550 \\ 0,5000 \end{vmatrix}; \\
\varepsilon_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{32}\cos\varphi_{10} - \omega_{10}\omega_{32}\sin\varphi_{10} \\ \varepsilon_{32}\sin\varphi_{10} + \omega_{10}\omega_{32}\cos\varphi_{10} \\ \varepsilon_{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0482 \\ 0,3165 \\ 0,2000 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

Модули векторов угловой скорости и углового ускорения:

$$|\omega_3| = 0{,}7070\ c^{-2},\ |\varepsilon_3| = 0{,}3775\ c^{-2}$$

Определение линейных скоростей и ускорений

Запишем матричные уравнения:

$$OB = L_{01};\ BC = A_{01}L_{12};\ CD = A_{01}\left(A_{23}r_{D_3}\right),$$

Столбец координат в системе $X_3Y_3Z_3$, ;

$$r_{D_3} = \begin{vmatrix} x_{D_3} \\ y_{D_3} \\ z_{D_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L_3^{'} \\ 0 \\ L_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,200 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix},$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы переноса соответственно от систем координат 1 к 0 и 2 к 1:

$$L_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix}, \quad L_{12} = \begin{vmatrix} -(L_2 + r_{23}) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,5000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрицы поворота при переходе, соответственно, от систем координат 1 к 0 и 3 к 2:

$$\left.\begin{aligned} A_{01} &= \begin{vmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8660 & -0,5000 & 0,0000 \\ 0,5000 & 0,8660 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{vmatrix} \\ A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} \\ 0 & \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,5000 & -0,8660 \\ 0,0000 & 0,8660 & 0,5000 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Таким образом, получаем матрицы:

$$\left.\begin{aligned}
OB &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,5000 \end{vmatrix};\\
BC &= \begin{vmatrix} -L_2\cos\varphi_{10} \\ -L_2\sin\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,4330 \\ -0,2500 \\ 0,0000 \end{vmatrix};\\
CD &= \begin{vmatrix} -L_3^{'}\cos\varphi_{10} + L_3\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{32} \\ -L_3^{'}\sin\varphi_{10} - L_3\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{32} \\ L_3\cos\varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,0433 \\ -0,1250 \\ 0,0500 \end{vmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

Модули соответствующих векторов:

|OB|=0,5000 м; |BC|=0,5000 м; |CD|=0,1414 м.

Скорость точки B:

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\omega}_1 \times \overline{OB}.$$

$$\overline{\upsilon}_B = 0$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Векторное уравнение для определения скорости точки C:

$$\bar{\upsilon}_C = \bar{\upsilon}_B + \bar{\upsilon}_{CB} = \bar{\upsilon}_{21} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC}$$

Относительная скорость: $\bar{\upsilon}_{21} = -\bar{e}_C \left|\upsilon_{21}\right|$

тогда в матричной форме: $$\bar{\upsilon}_{21} = \begin{vmatrix} -\upsilon_{21}\cos\varphi_{10} \\ -\upsilon_{21}\sin\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1,95 \\ -0,2500 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы-вектора $\bar{\omega}_2 \times \overline{BC}$: $$\bar{\omega}_2 \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \omega_{10} L_2 \sin\varphi_{10} \\ -\omega_{10} L_2 \cos\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1250 \\ -0,2165 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Линейная скорость точки C: $$\bar{\upsilon}_C = \begin{vmatrix} -\upsilon_{21}\cos\varphi_{10} + \omega_{10} L_2 \sin\varphi_{10} \\ -\upsilon_{21}\sin\varphi_{10} - \omega_{10} L_2 \cos\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,3080 \\ -0,4665 \\ 0,0000 \end{vmatrix},$$

Модуль скорости: $|v_C|$=0,5990 м/с.

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Скорость точки D:

$$\overline{\upsilon}_D = \overline{\upsilon}_C + \overline{\upsilon}_{DC} = \overline{\upsilon}_C + \overline{\omega}_3 \times \overline{CD}$$

Матрица-столбец вектора $\overline{\omega}_3 \times \overline{CD}$:

$$\overline{\omega}_3 \times \overline{CD} = \begin{vmatrix} L_3\left(\omega_{32}\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{32} + \omega_{10}\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{32}\right) + L_3'\omega_{10}\sin\varphi_{10} \\ L_3\left(\omega_{10}\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{32} - \omega_{32}\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{32}\right) - L_3'\omega_{10}\cos\varphi_{10} \\ -L_3\omega_{32}\sin\varphi_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0750 \\ -0,0433 \\ -0,0433 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора $\overline{\upsilon}_D$: $\overline{\upsilon}_D = \begin{vmatrix} -0,2330 \\ -0,5098 \\ -0,0433 \end{vmatrix}$

$\left|\upsilon_D\right|$= 0,5622 м/с.

Таким образом, определены значения линейных скоростей всех звеньев манипулятора.

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Ускорение точки B:

$$\overline{a}_B = \overline{\omega}_1 \times \left(\overline{\omega}_1 \times \overline{OB}\right) + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{OB}$$

$$\overline{a}_B = 0$$

Ускорение точки C:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB} = \overline{a}_{21} + \overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{BC}\right) + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} + 2\left(\overline{\omega}_2 \times \overline{\upsilon}_{21}\right).$$

где $\overline{a}_{21} = \overline{e}_C \left|a_{21}\right|,$

$$\overline{a}_{21} = \begin{vmatrix} a_{21}\cos\varphi_{10} \\ a_{21}\sin\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0866 \\ 0,0500 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица векторного произведения $\overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{BC}\right)$:

$$\overline{\omega}_2 \times \left(\overline{\omega}_2 \times \overline{BC}\right) = \begin{vmatrix} \omega_{10}^2 L_2 \cos\varphi_{10} \\ \omega_{10}^2 L_2 \sin\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1082 \\ 0,0625 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Матрицы векторного произведения $\bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC}$:

$$\bar{\varepsilon}_2 \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{10} L_2 \sin\varphi_{10} \\ -\varepsilon_{10} L_2 \cos\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0500 \\ -0,0866 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора ускорения Кориолиса:

$$2\left(\bar{\omega}_2 \times \bar{\upsilon}_{21}\right) = \begin{vmatrix} 2\omega_{10}\upsilon_{21} \sin\varphi_{10} \\ -2\omega_{10}\upsilon_{21} \cos\varphi_{10} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2500 \\ -0,0433 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Матрица вектора линейного ускорения точки C:

$$\bar{a}_C = \begin{vmatrix} 0,4948 \\ -0,4071 \\ 0,0000 \end{vmatrix}$$

Модуль вектора ускорения: $\left|a_C\right| = 0{,}6407\ м/с^2.$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Ускорение точки D:

$$\overline{a}_D = \overline{a}_C + \overline{a}_{DC} = \overline{a}_C + \overline{\omega}_3 \times \left(\overline{\omega}_3 \times \overline{CD}\right) + \overline{\varepsilon}_3 \times \overline{CD},$$

Векторные произведения:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}_3 \times \left(\overline{\omega}_3 \times \overline{CD}\right) &= \begin{vmatrix} 0,0108 \\ 0,0562 \\ -0,0375 \end{vmatrix} \\ \overline{\varepsilon}_3 \times \overline{CD} &= \begin{vmatrix} 0,0408 \\ -0,0111 \\ 0,0077 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Матрица-столбец вектора линейного ускорения точки D:

$$\overline{a}_D = \begin{vmatrix} 0,5464 \\ -0,3620 \\ -0,0298 \end{vmatrix}$$

Модуль ускорения точки D: $\left|a_D\right| = 0,6561\ м/с^2$

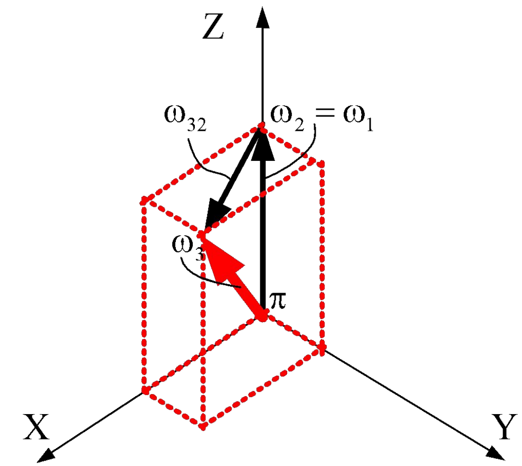
Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

Метод планов

1. План угловых скоростей

Масштаб угловой скорости = $\mu_\omega = 0,01\dfrac{c^{-1}}{мм}$

$\omega_{32} = 0,5c^{-1}$



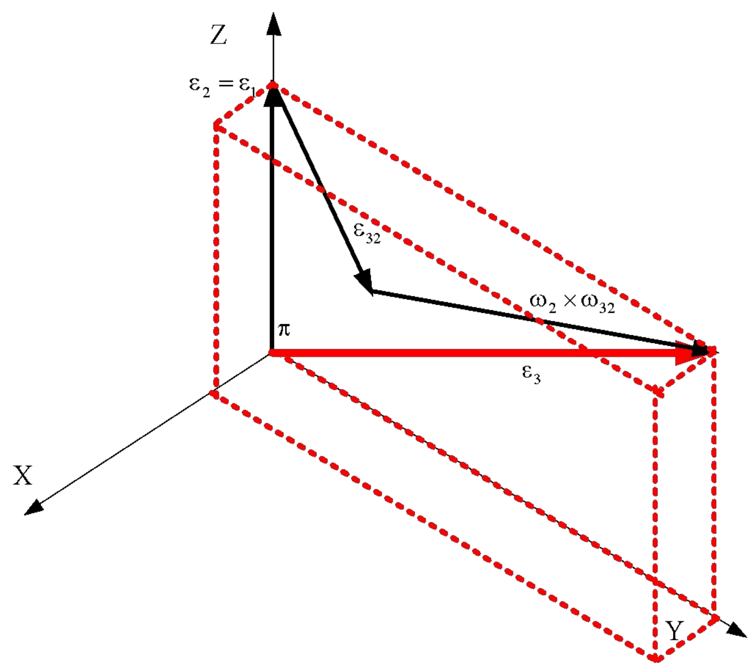
2. План угловых ускорений

Масштаб углового ускорения = $\mu_\varepsilon = 0,005\dfrac{c^{-2}}{мм}$

$\varepsilon_1 = 0,2(c^{-2})$

Угловое ускорение третьего звена:

$$\overline{\varepsilon}_3 = \overline{\varepsilon}_2 + \overline{\varepsilon}_{32} + \overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_{32}$$

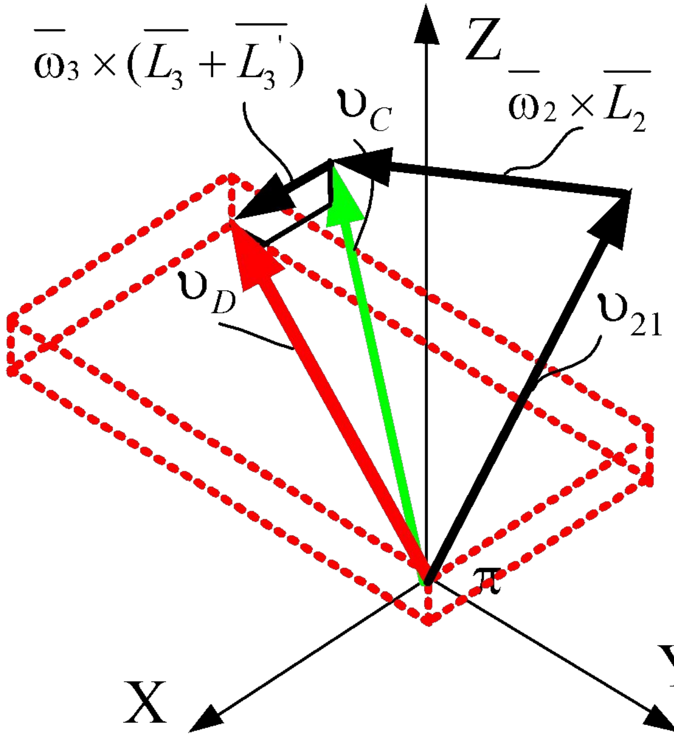


Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)

3. План линейных скоростей

Масштаб плана скоростей: $\mu_v = 0,01\dfrac{м/с}{мм}$

$\upsilon_C^{\omega} = \omega_2 \cdot L_2 = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2(\ /\ )$



4. План линейных ускорений

Масштаб плана ускорений: $\mu_a = 0,01\dfrac{м/с^2}{мм}$

$a_C = \cancel{a_B} + a_C^{\,n} + a_C^{\,\tau} + a_C^{\,r} + a_C^{\,k}$

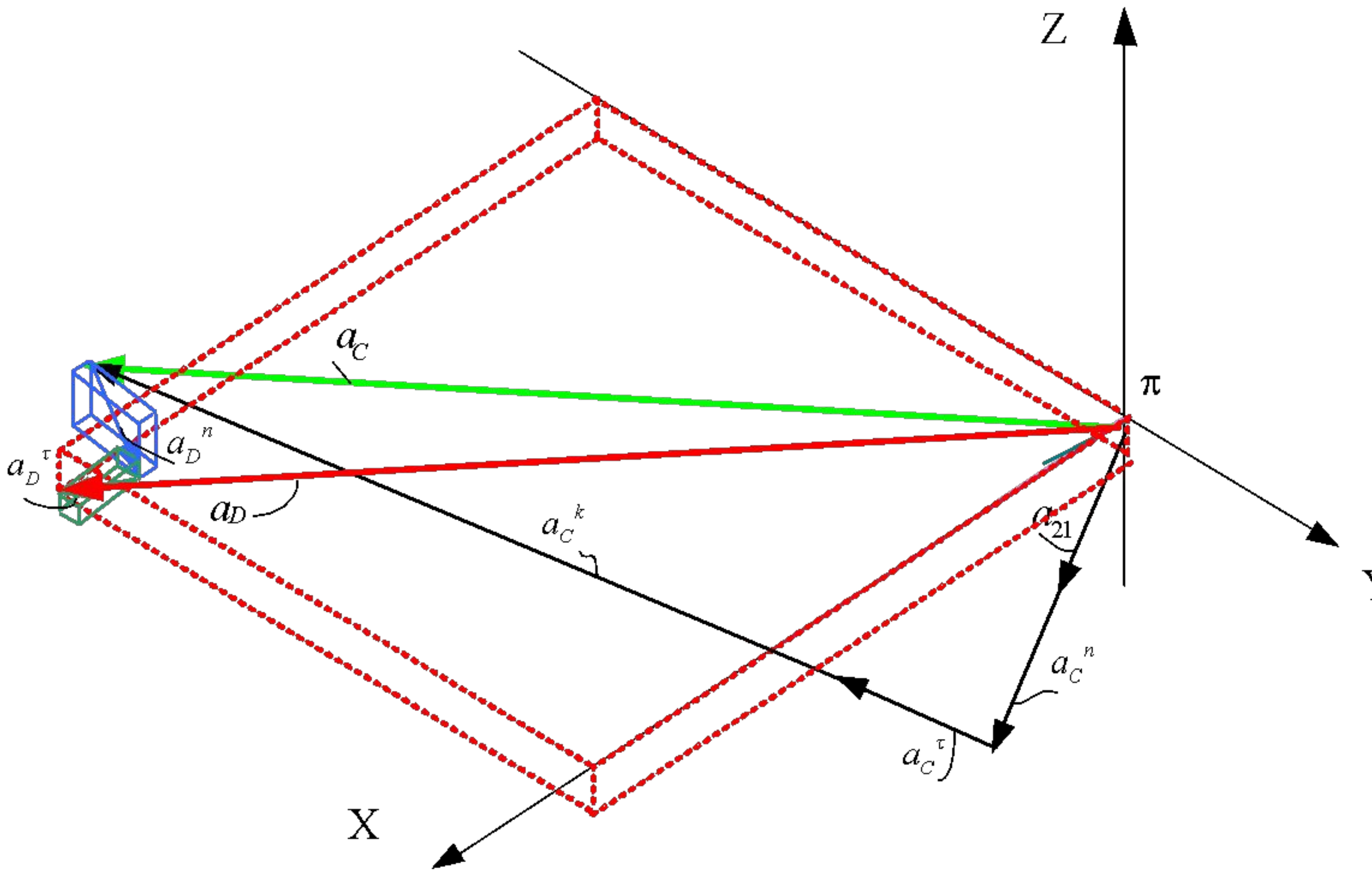
$a_{21} = 0,1\ \ /\ ^2$

$a_C^{\,n} = \omega_2^2 \cdot L_2 = 0,5^2 \cdot 0,4 = 0,1(\ /\ ^2)$

$a_C^{\,\tau} = \varepsilon_2 \cdot L_2 = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08(\ /\ ^2)$

$a_C^{\,k} = 2(\omega_2 \times \upsilon_{21}) = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5(\ /\ ^2)$

Прямая задача о скоростях и ускорениях (продолжение)



Кинематический синтез механизмов

Кинематический синтез механизма – проектирование нового механизма.

Этапы кинематического синтеза:

1. Выбор схемы механизма в соответствии с заданными условиями и чаще всего по аналогии с существующими механизмами.
2. Установление основные размеры механизма, наиболее полно удовлетворяющие поставленным условиям.
3. Конструктивное оформление механизма, его кинематическое и силовое исследование.
4. Расчет звеньев на прочность.

Синтез осуществляется при заданных скоростях, ускорениях, действующих силах, напряжениях или деформациях.

При этом требуется определить необходимые размеры звеньев, их форму и массу.

Синтез механизмов

При синтезе часто решается задача оптимального проектирования конструкции, когда находятся необходимые показатели работы машины при наименьших затратах труда.

Основные этапы создания новой конструкции:

1) Разработка принципиальной схемы;
2) Проектирование и расчет машины и отдельных ее узлов;
3) Экспериментальные исследования и доводка опытного образца.

Основные этапы проектирования новой техники:

а) разработка технического задания, включающего основные исходные данные;
б) разработка эскизного проекта, включающего выбор схемы и компоновку основных узлов конструкции;
в) разработка технического проекта, где осуществлены основные расчеты и представлены сборочный чертеж и др. документация.

Заключение

Кинематический анализ механизма - исследование его основных параметров с целью изучения законов изменения перемещения, скорости и ускорения.

Целью кинематического анализа является определение кинематических характеристик механизма без учёта сил, вызывающих это движение.

При этом решаются **прямая** и **обратная задачи кинематики (о положениях, скоростях, ускорениях)**.

Два основных метода:

- аналитический;
- метод планов.

***Зона обслуживания манипулятора* -** часть пространства, соответствующая множеству возможных положений центра схвата манипулятора.

Кинематический синтез представляет собой метрический синтез. Здесь определяются размеры звеньев механизма, при которых удовлетворяются поставленные требования.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ