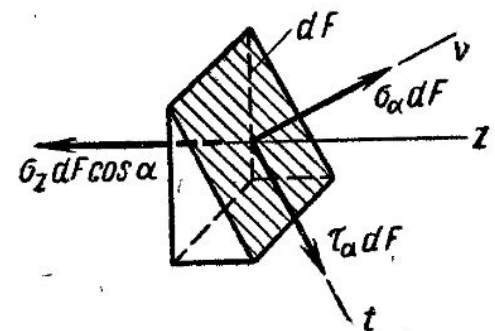
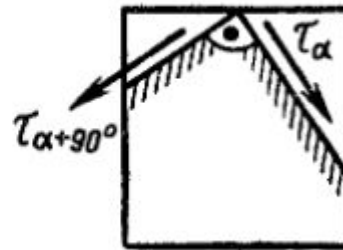
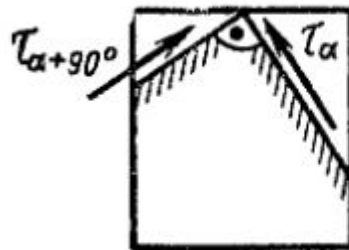


Лекция №3

Чистый сдвиг. Кручение.

На примере растяжения и сжатия были выявлены некоторые наиболее важные свойства напряженного состояния. При растяжении в зависимости от ориентации секущих площадок на гранях выделенного прямоугольного элемента возникают как нормальные, так и касательные напряжения. Последние, независимо от величины нормальных напряжений, подчиняются уравнению

$$|\tau_{\alpha}| = |\tau_{\alpha+90^{\circ}}|$$

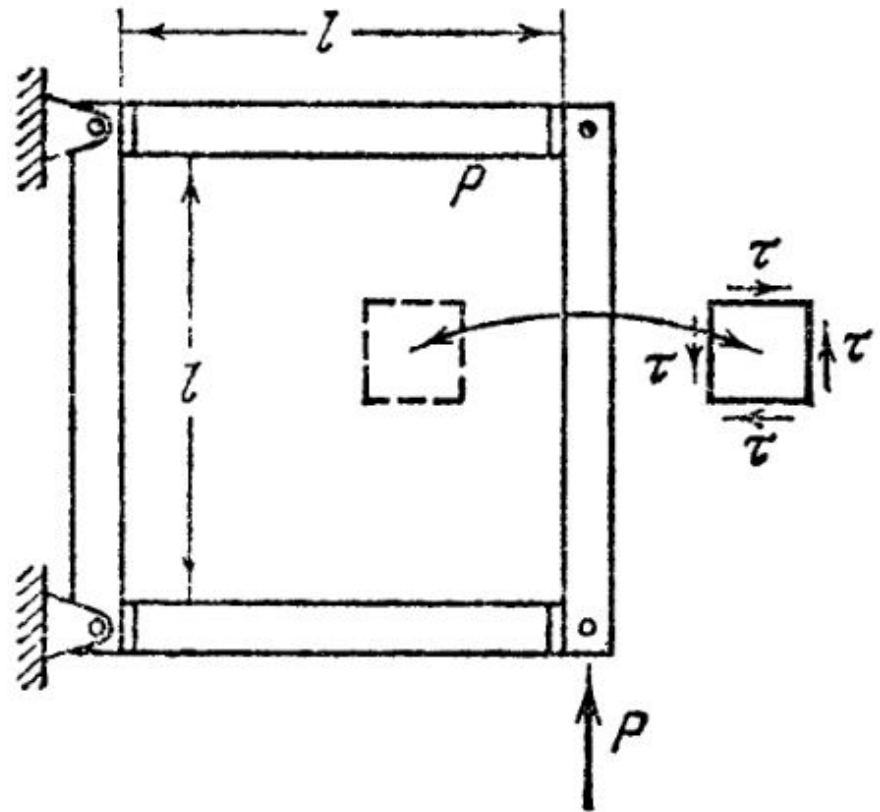


Теперь положим, что имеется такое напряженное состояние, когда на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения τ .

Такое напряженное состояние называется

чистым сдвигом.

Наиболее просто
однородный чистый
сдвиг может быть
осуществлен
непосредственным
нагружением
пластины, захваченной
в жесткие контурные
шарнирно
соединенные накладки



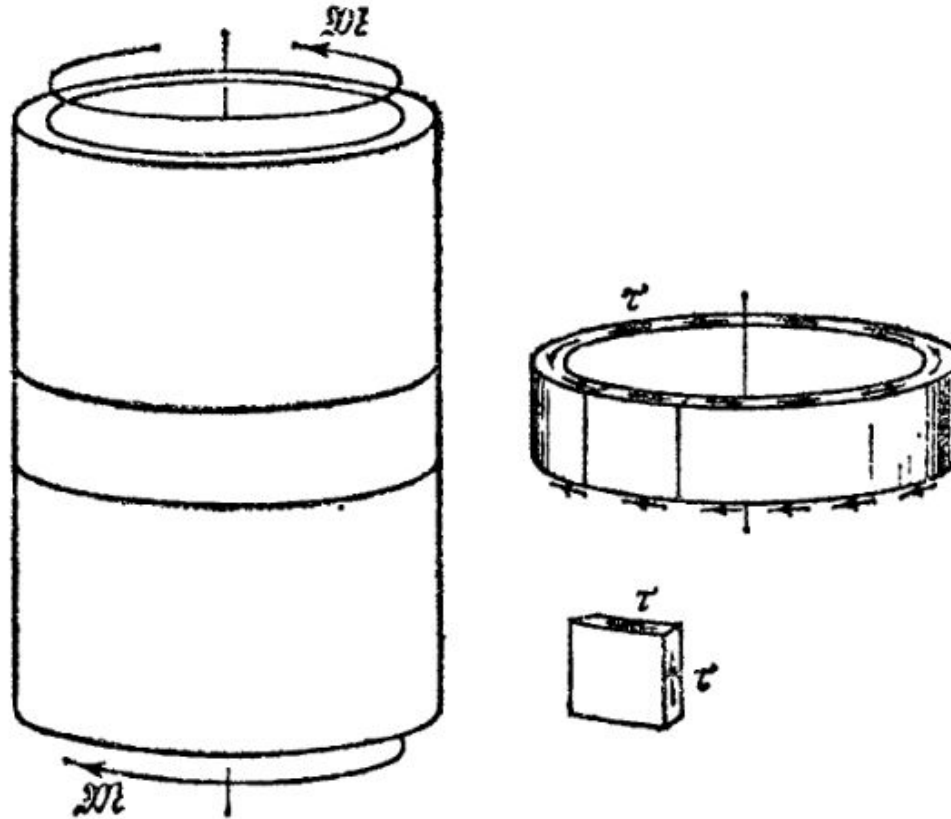
Для всех точек пластины касательные напряжения τ будут, очевидно, следующими:

$$\tau = \frac{P}{l\delta}$$

δ –толщина пластины

Исключение составляет узкая краевая зона, где пластина сопрягается с накладками. Здесь напряженное состояние будет отличным от чистого сдвига. Однако в соответствии с принципом **Сен-Венана** эти отклонения носят чисто местный характер, и область их распространения мала по сравнению с общими размерами напряженной пластины.

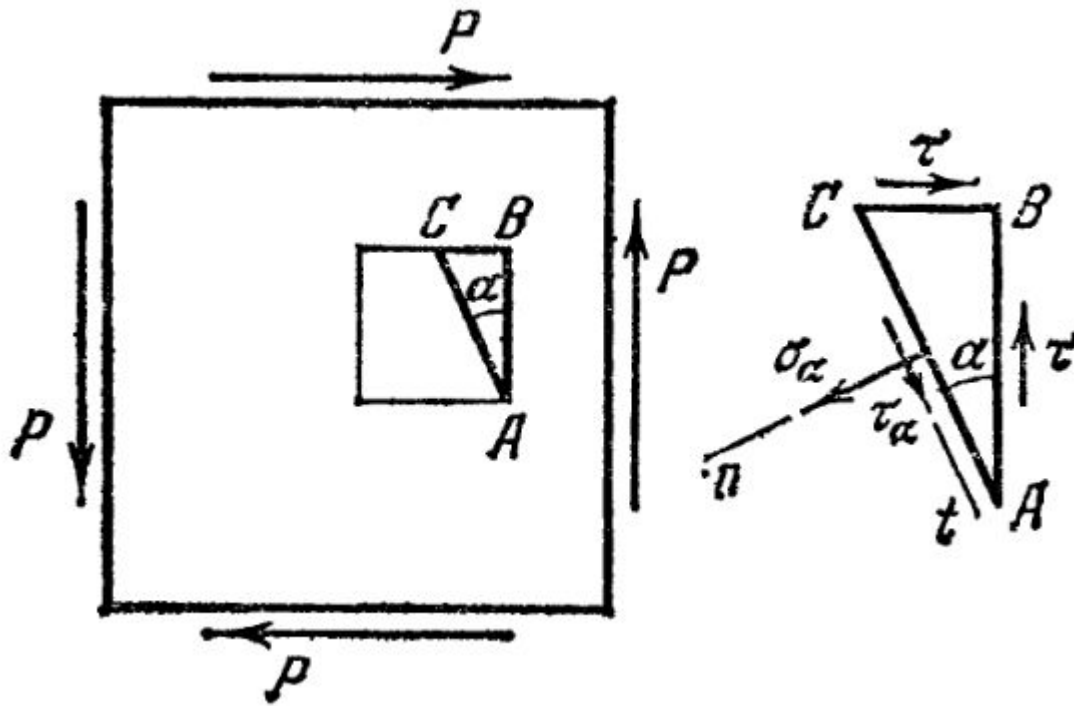
В качестве второго примера, иллюстрирующего состояние однородного чистого сдвига, можно рассмотреть тонкостенную цилиндрическую трубку, нагруженную моментами, приложенными в торцевых плоскостях.



Величина напряжения τ определяется из условий равенства момента равномерно распределенных по поперечному сечению внутренних сил моменту

$$m: \quad \tau = \frac{m}{2\pi R^2 \delta} \quad \begin{array}{l} R - \text{радиус трубки, } \delta - \text{толщина} \\ \text{трубки.} \end{array}$$

Посмотрим теперь, как при чистом сдвиге изменяются напряжения в зависимости от ориентации секущих площадок. Для этого из пластины, находящейся в состоянии чистого сдвига, выделим элементарную трехгранную призму ABC .



На гранях AB и BC по условию возникают только касательные напряжения τ . На грани AC в зависимости от угла α возможно возникновение как нормального, так и касательного напряжений. Обозначим их соответственно через σ_α и τ_α .

Проектируем все силы, действующие на призму, на оси n и t . Условия равновесия дают

$$\sum F_n = 0: \sigma_\alpha AC \cdot \delta - \tau AB \cdot \delta \sin \alpha - \tau BC \cdot \delta \cos \beta = 0$$

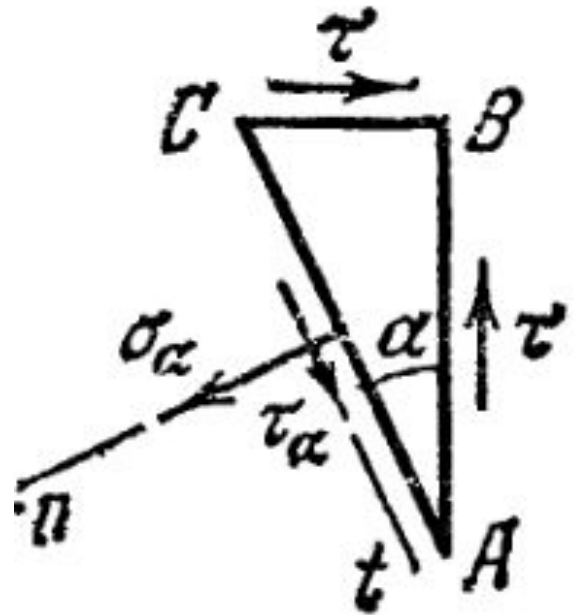
$$\sum F_t = 0: \tau_\alpha AC \cdot \delta - \tau AB \cdot \delta \cos \alpha + \tau BC \cdot \delta \sin \alpha = 0$$

Отрезки AB и BC связаны с AC очевидными соотношениями
 $AB = AC \cos \alpha$, $BC = AC \sin \alpha$

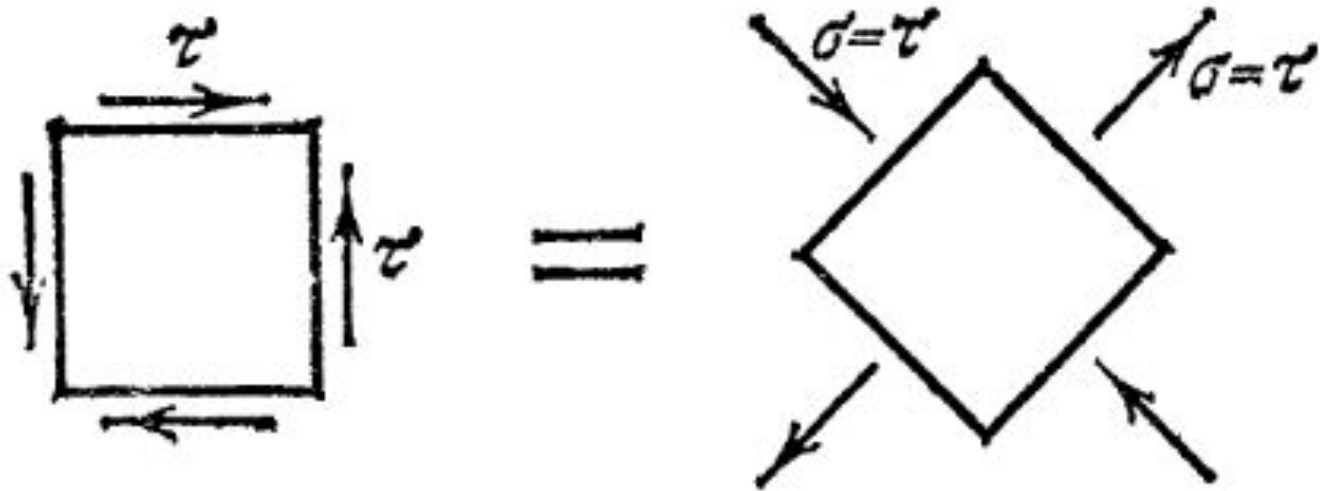
Поэтому

$$\sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha$$



При $\alpha=0$ и $\alpha=90^\circ$ напряжения σ_α и τ_α принимают значения, соответствующие исходным площадкам, т. е. $\sigma_\alpha=0$, а $\tau_\alpha=\tau$. При $\alpha=\pm 45^\circ$ $\tau_\alpha=0$, а $\sigma_\alpha=\pm\tau$. Следовательно, если из пластины выделить прямоугольный элемент, грани которого повернуты относительно исходных плоскостей на угол 45° , то на секущих площадках будут обнаружены только нормальные напряжения



При этом на одной паре граней эти напряжения являются растягивающими, а на другой — сжимающими.

Таким образом, чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям

Деформации при сдвиге

Касательное напряжение τ связано с угловой деформацией γ соотношением

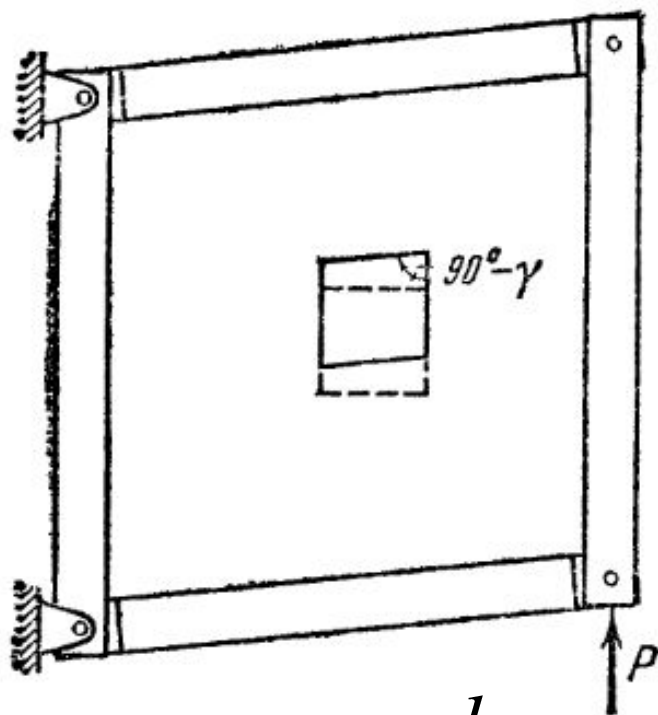
$$\tau = \gamma G$$

G – модуль упругости второго рода или модуль сдвига

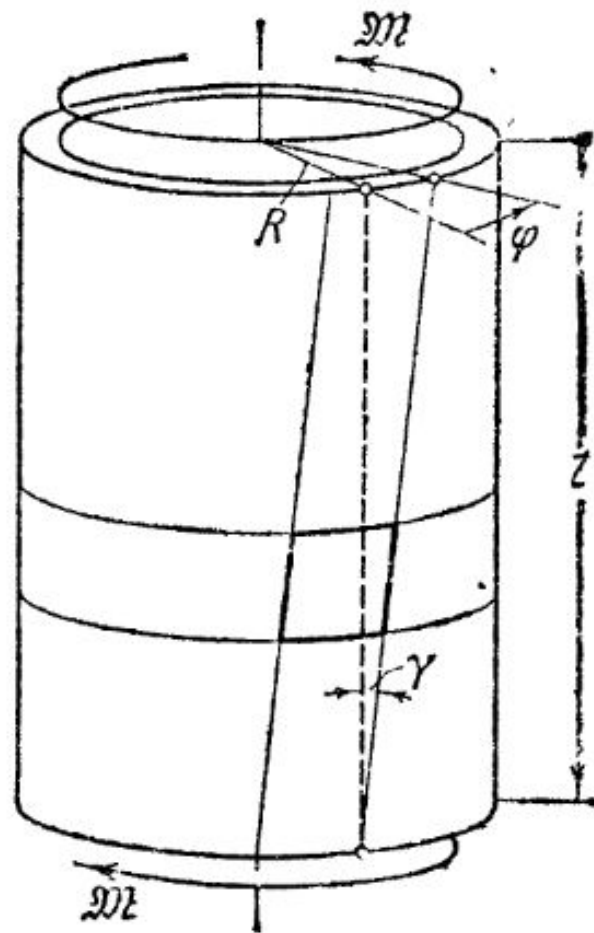
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

μ – коэффициент
Пуассона

В результате возникающих угловых деформаций пластин, перекашивается, а торцевые сечения трубки получают взаимные угловые смещения φ .

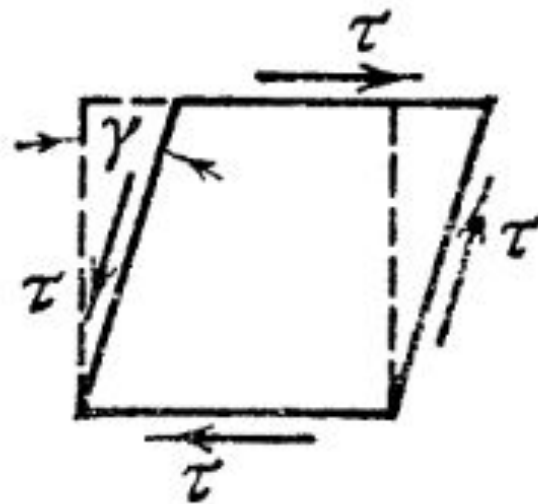
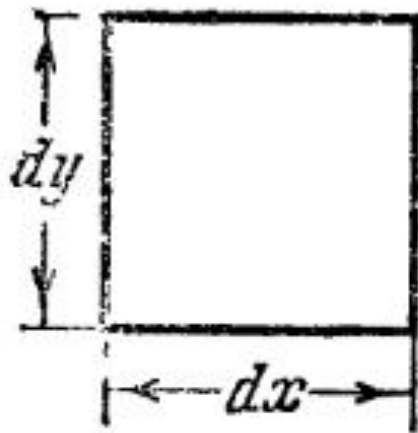


$$\varphi = \frac{\gamma l}{R}$$



Энергия деформации при чистом сдвиге

При чистом сдвиге, как и при растяжении (да и вообще при всяком напряженном состоянии), в деформируемом теле накапливается упругая потенциальная энергия. Эту энергию легко подсчитать, рассматривая изменение формы прямоугольного элемента с высотой dy и толщиной b .



Примем нижнюю грань элемента условно за неподвижную. Тогда при смещении верхней грани сила $\tau \cdot dx \cdot \delta$ совершит работу на перемещении y dy . Так как сила меняется пропорционально смещению, то ее работа равна половине произведения

$$\tau \cdot dx \cdot \delta \cdot \gamma \cdot dy.$$

Следовательно, потенциальная энергия деформации, накопленная в элементе, равна

$$dU = \frac{1}{2} \tau \gamma dx dy \delta$$

Если отнести энергию к единице объема $dV = dx \cdot dy \cdot \delta$

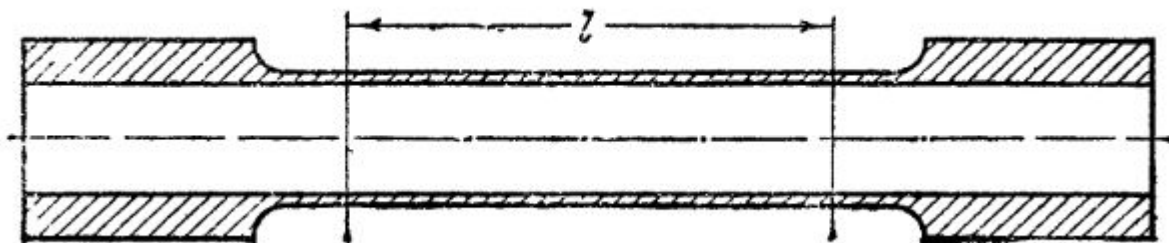
$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau \gamma$$

Выразим угол сдвига γ из закона Гука $\tau = \frac{\tau}{G}$

$$\text{Тогда} \quad U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

Величина U_o называется **удельной потенциальной энергией** при сдвиге и измеряется в Дж/м³.

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие можно провести испытание материала в условиях чистого сдвига. Для этого удобнее всего воспользоваться испытанием тонкостенной трубки



Если во время испытания производить замер момента m и взаимного угла поворота сечений ϕ на длине l , можно построить для образца диаграмму $m=F(\phi)$.

В дальнейшем эта диаграмма согласно выражениям

$$\phi = \frac{\gamma l}{R} \quad \tau = \frac{m}{2\pi R^2 \delta}$$

легко приводится к переменным τ и γ .

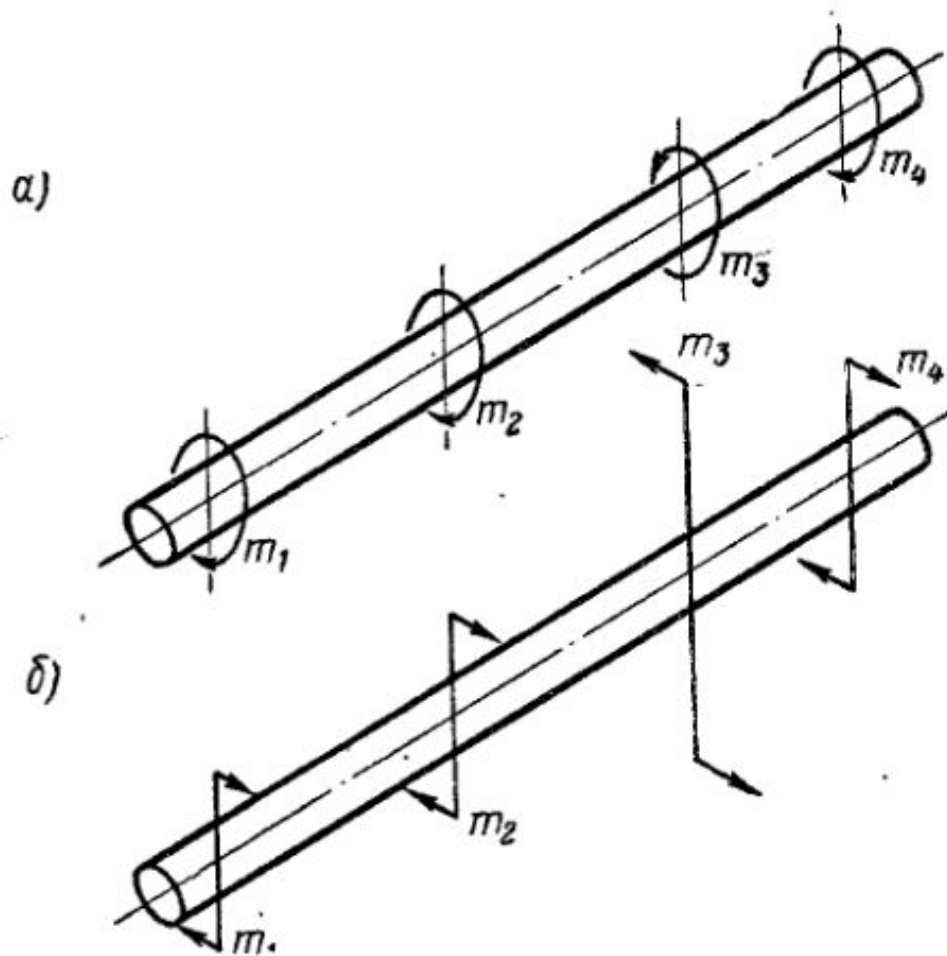
Таким образом может быть получена диаграмма сдвига для материала $\tau=f(\gamma)$.

Сопоставление диаграммы сдвига с диаграммой растяжения для одного и того же материала показывает их качественное сходство. На диаграмме сдвига также имеется упругая зона, зоны текучести и упрочнения.

Аналогичным образом для сдвига, как и для растяжения, можно было бы дополнительно ввести характеристики — предел пропорциональности при сдвиге, предел упругости, предел текучести и т. д.

Кручение

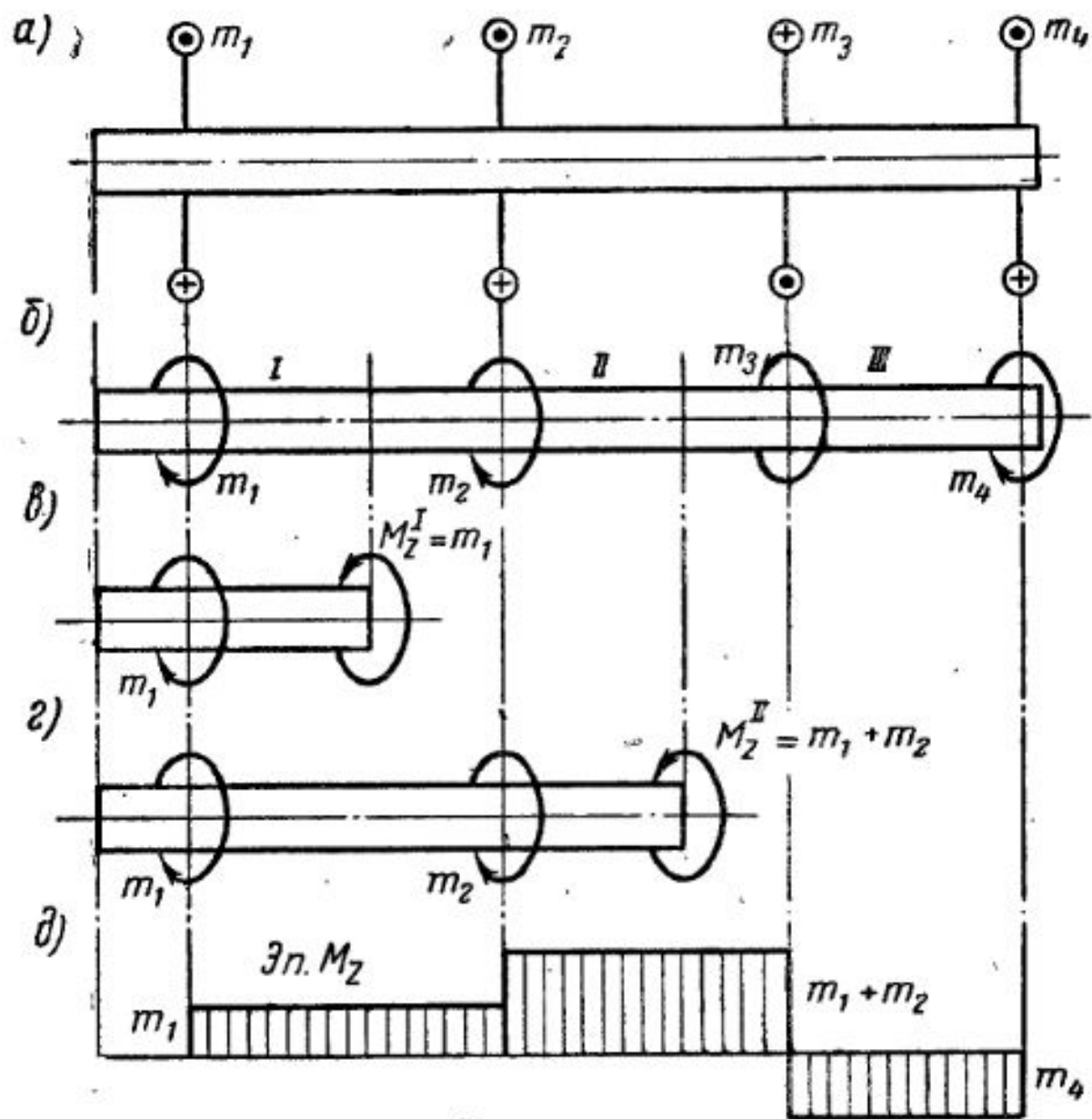
Кручение — это такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор — ***крутящий момент***, обозначаемый M_z или M_k . Деформация кручения возникает при нагружении бруса парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Моменты этих пар будем называть скручивающими моментами и обозначать буквой m .



Во всех случаях будем считать, что алгебраическая сумма скручивающих моментов равна нулю, т. е. брус находится в равновесии.

Применяя метод сечений и рассматривая равновесие оставленной части, приходим к выводу, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении бруса, должны дать момент, (*крутящий момент*) уравновешивающий внешние моменты, приложенные к отсеченной части.

Крутящий момент, возникающий в произвольном поперечном сечении бруса, численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, приложенных к отсеченной части.



При кручении бруса в его поперечных сечениях возникают только *касательные* напряжения. Действительно, момент относительно продольной оси бруса дают только внутренние касательные силы (нормальные силы параллельны этой оси). Кроме того, наличие внутренних нормальных сил, приводящихся к силе или к паре сил, противоречит условию равновесия отсеченной части бруса. Наличие самоуравновешенной системы внутренних нормальных сил, естественно, не противоречит условию равновесия, но случаи возникновения такой системы (так называемое стесненное кручение) в настоящем курсе не рассматриваются.

Крутящим моментом называется результирующий момент относительно продольной оси бруса внутренних касательных сил, возникающих в его поперечном сечении. Для расчета на прочность, надо найти его опасное сечение. В случае, если размеры поперечного сечения по длине бруса постоянны опасными будут сечения, в которых крутящий момент максимален. График, показывающий закон изменения крутящих моментов по длине бруса, называется *эпюрой крутящих моментов*.

Построение эпюр принципиально ничем не отличается от построения эпюр продольных сил и производится на основе сформулированного выше правила вычисления крутящих моментов.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла, но для определенности при построении эпюр условимся о следующем правиле знаков.

Будем считать крутящий момент **положительным**, если для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение, он представляется направленным против хода часовой стрелки.

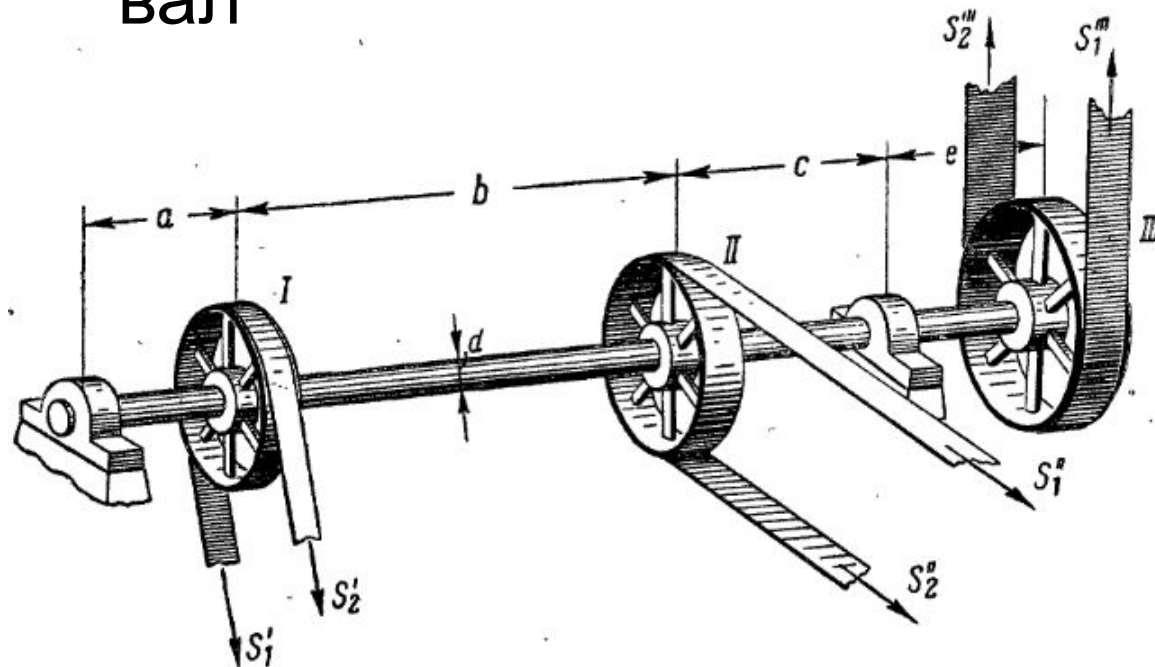
Часто применяют и прямо противоположное правило знаков.

Характер деформации при кручении существенно зависит от формы поперечного сечения бруса.

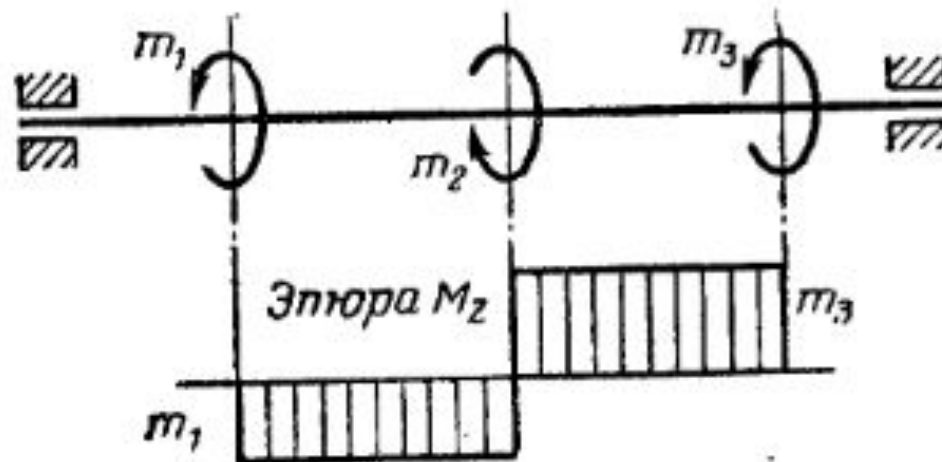
Методами сопротивления материалов задача о напряжениях и перемещениях при кручении может быть решена только для бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения. При некоторых дополнительных допущениях можно решить задачу о кручении брусьев тонкостенного замкнутого профиля.

Теория кручения бруса круглого поперечного сечения наиболее часто используется при расчете различных валов.

Трансмиссионный вал



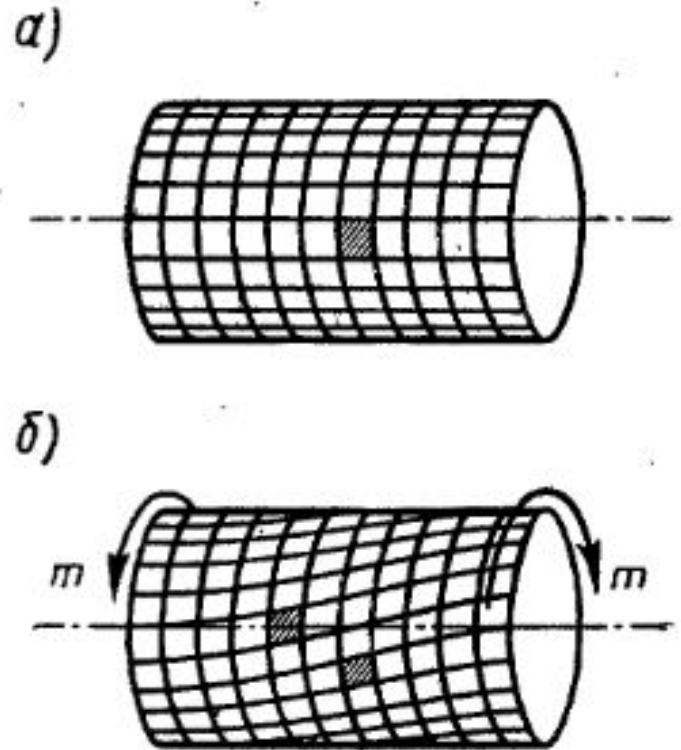
Расчетная
схема



Напряжения и перемещения при кручении бруса круглого поперечного сечения

Теория кручения бруса круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения основана на следующих допущениях.

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации (гипотеза Бернулли).



2. Расстояния между поперечными сечениями в процессе деформации не изменяются.

Радиусы поперечных сечений при деформации бруса не искривляются.

3. Материал бруса при деформации следует закону Гука (конечно, это допущение не характерно для рассматриваемого случая—оно является общим для всех видов деформаций, изучаемых в нашем курсе).

Справедливость принятых допущений подтверждается, и тем, что полученные на основе их формулы совпадают с формулами, полученными в теории упругости без этих допущений, и хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Рассмотрим брус, жестко защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом m

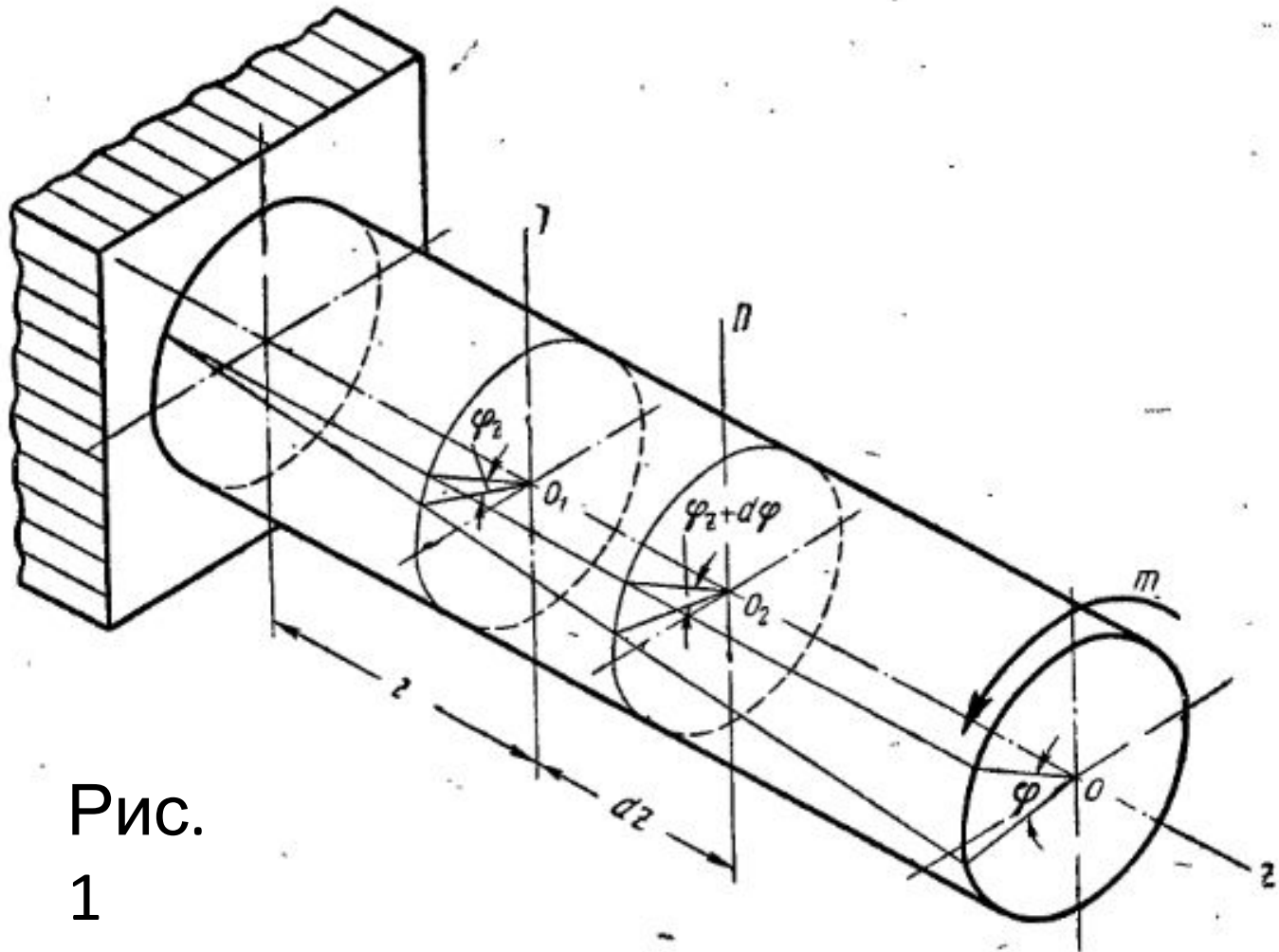


Рис.
1

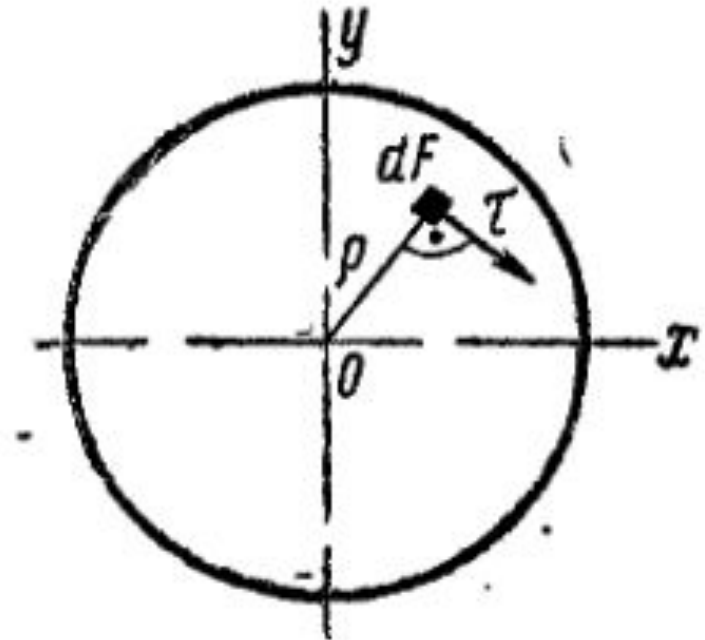
При деформации бруса его поперечные сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему первоначальному положению или, что то же, по отношению к неподвижному сечению (заделке). Угол поворота будет тем больше, чем дальше отстоит данное сечение от заделки.

Так, для произвольного сечения I , отстоящего от заделки на расстояние z , он равен ϕ_z , а для сечения II $\phi_z + d\phi$. Здесь $d\phi$ — угол поворота сечения II относительно I , или угол закручивания элемента бруса длиной dz .

Вообще угол поворота произвольного сечения равен углу закручивания части бруса, заключенной между *этим* сечением и заделкой.

Применяя метод сечений, легко убедиться, что крутящий момент во всех поперечных сечениях бруса одинаков: $M_z = m$. Выразим его через касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении.

При этом учтем, что в любой точке поперечного сечения касательное напряжение направлено перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.



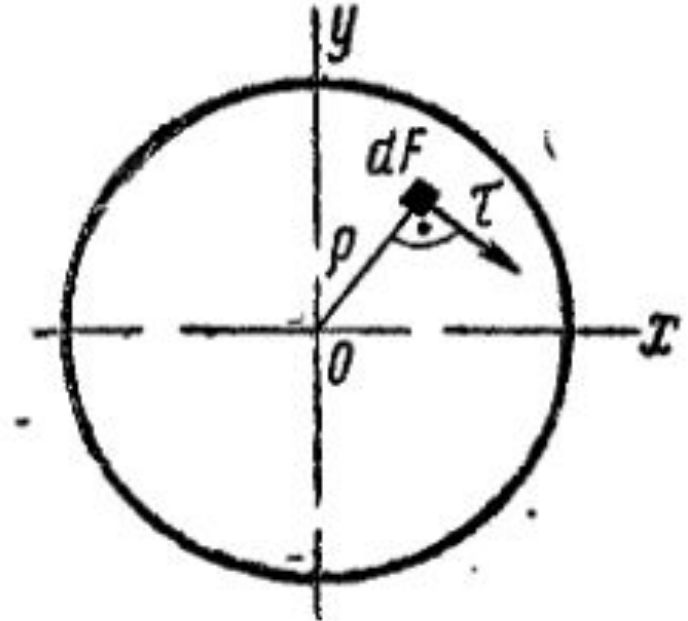
Такое направление напряжений следует из характера деформации: при повороте произвольного поперечного сечения (см. рис. 1) каждая его точка (кроме лежащей на оси бруса) перемещается по дуге окружности, концентричной контуру сечения. Иными словами, направление этого перемещения, а значит и возникающего в этой точке касательного напряжения, перпендикулярно соответствующему радиусу.

Элементарная касательная сила, приходящаяся на площадку dF , равна τdF , а ее момент относительно оси z (точки O)

$$dM_z = (\tau dF) \rho$$

Суммируя эти элементарные моменты, получаем следующее выражение для крутящего момента:

$$M_z = \int_F \tau \rho dF \quad (1)$$



Хотя крутящий момент может рассматриваться как известная величина (он определяется с помощью метода сечений через заданные внешние моменты), использовать выражение (1) для вычисления касательных напряжений невозможно, так как закон их распределения по поперечному сечению пока неизвестен. Для выяснения этого закона рассмотрим более подробно вопрос о деформациях. Выделим часть бруса двумя бесконечно близкими поперечными сечениями I и II (см. рис. 1).

Будем считать выделенную часть бруса зашечмленной в сечении I (см. рис.2).

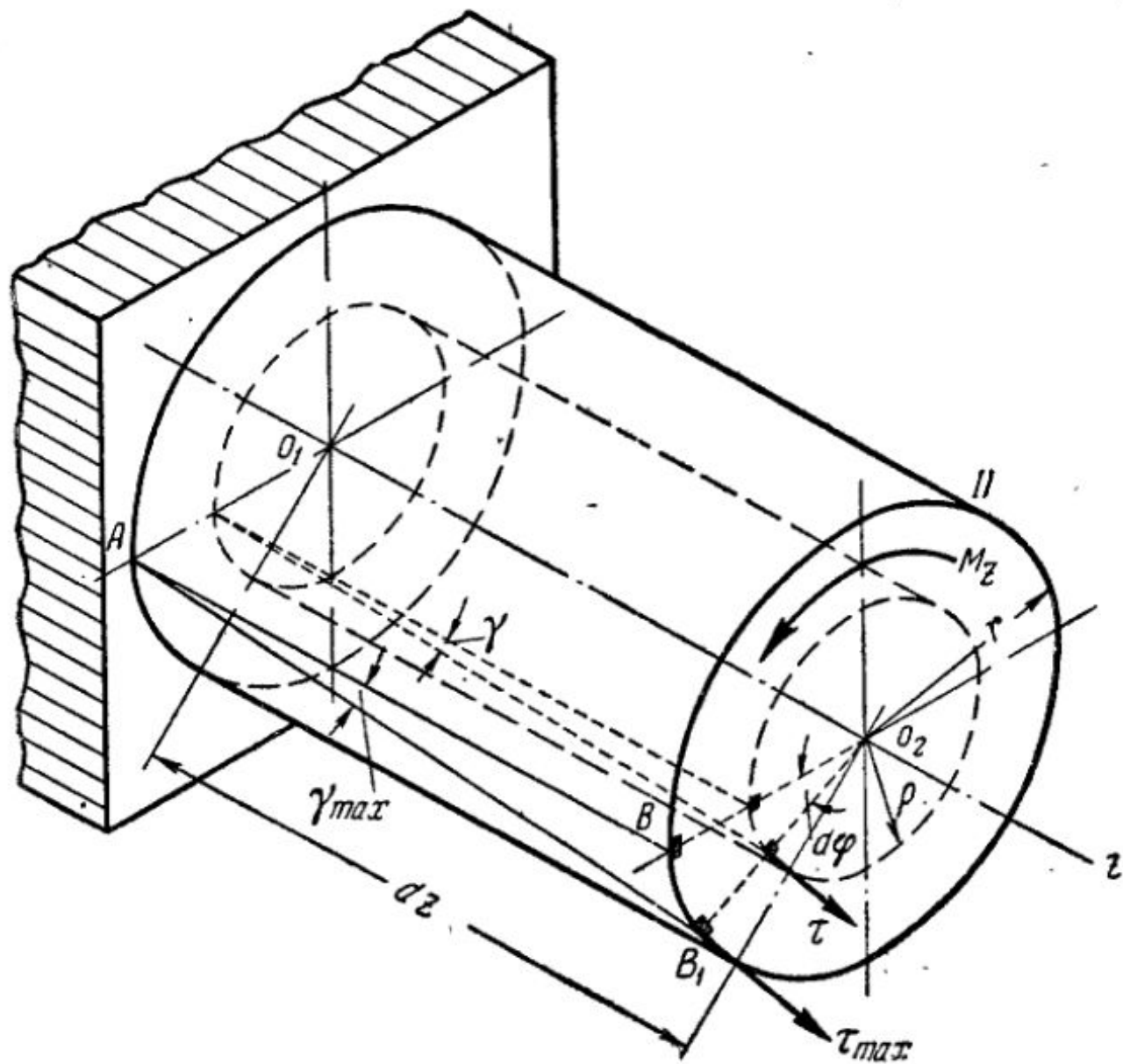


Рис.
2

Точка B , взятая на контуре сечения II , в результате его поворота на угол $d\phi$ перейдет в положение B_1 . Деформация сдвига соответствующего элемента бруса (торец этого элемента, лежащий в сечении II , зачернен) характеризуется углом сдвига $\gamma_{\max}$. Из прямоугольного треугольника ABB_1 учитывая, что $BB_1 = r d\phi$, и в силу малости деформаций $\text{tg} \gamma \approx \gamma$ получаем

$$\gamma_{\max} = r \frac{d\phi}{dz}$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного радиуса ρ (см. рис. 2) и повторяя те же рассуждения, имеем

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (2)$$

Применяя закон Гука для сдвига $\tau = G\gamma$, и подставляя в него выражение (2) получаем следующее выражение для касательного напряжения

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) получим

$$M_z = \int_F G \rho \frac{d\varphi}{dz} \rho dF$$

При интегрировании по площади поперечного сечения величина $\frac{d\varphi}{dz}$ постоянна также как и G , поэтому может быть вынесена за знак интеграла

$$M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF \quad (4)$$

Интеграл, входящий в выражение (4), представляет собой величину геометрического характера, называемую **полярным моментом инерции** сечения и обозначаемую I_p

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \quad (5)$$

Полярный момент инерции представляет собой взятую по всей площади сечения сумму произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до начала координат (центра тяжести сечения). Очевидно, он имеет размерность длины в четвертой степени.

Возвращаясь к выражению (4), перепишем его
теперь в виде

$$M_z = GI_p \frac{d\varphi}{dz}$$

откуда
а

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p} \quad (6)$$

Подставляя значение $\frac{d\varphi}{dz}$ из (6) в (3) получим

$$\tau = G\rho \frac{M_z}{GI_p}$$

ил
и

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho \quad (7)$$

Формула (7) позволяет определить величину касательного напряжения в любой точке поперечного сечения. Из этой формулы следует, что касательные напряжения распределены вдоль любого радиуса сечения по линейному

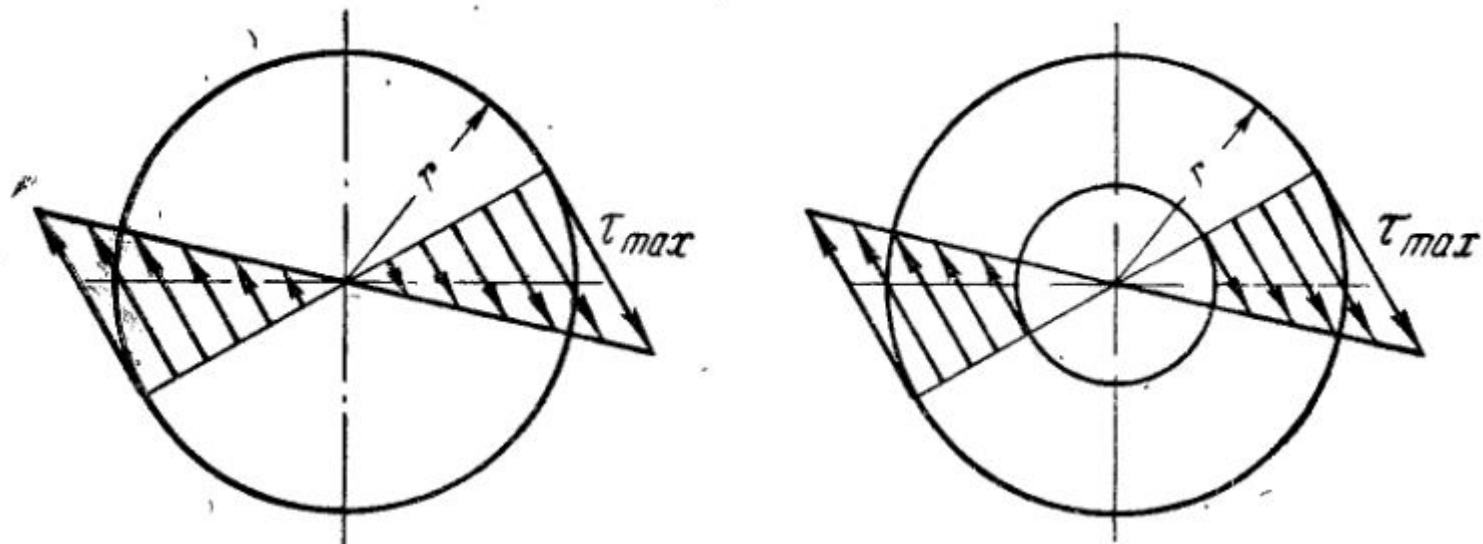


Рис.

Эпюры касательных напряжений для круглого³ сплошного и кольцевого поперечных сечений показаны на рис. 3.

В точках, равноудаленных от центра сечения, напряжения τ одинаковы. *Наибольшего значения касательные напряжения достигают в точках контура поперечного сечения.* Они могут быть определены путем подстановки в (7) вместо ρ его наибольшего значения, т. е. r

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} r$$

Введя
обозначение

$$W_p = \frac{I_p}{r}$$

Получи
м

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (8)$$

Величину W_p , равную отношению молярного момента инерции сечения к его радиусу, называют **полярным моментом сопротивления** сечения. Его размерность — длина в кубе. Очевидно, **полярный момент сопротивления** является геометрической характеристикой прочности бруса круглого поперечного сечения при кручении.

Формулу для определения **углов закручивания** получим из выражения (6). Угол закручивания элемента бруса длиной dz

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{GI_p}$$

Суммируя элементарные углы закручивания, найдем полный угол закручивания бруса (или отдельного его участка)

$$\varphi = \int_l \frac{M_z dz}{GI_p}$$

В самом общем случае, когда для отдельных участков бруса законы изменения крутящих моментов или полярных моментов инерции (или тех и других величин одновременно) различны, следует пользоваться формулой

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \int_{l_i} \frac{M_z dz}{GI_p} \quad \begin{array}{l} k - \text{количество} \\ \text{участков} \end{array}$$

Все приведенные формулы дают значение угла ϕ в радианах. При их применении следует учитывать указания по использованию аналогичных формул для определения изменения длины бруса при растяжении

Обратимся к выводу формул для вычисления полярного момента инерции и полярного момента сопротивления. Выведем эти формулы для кольцевого сечения с внутренним диаметром d_0 и наружным d (рис. 4).

Разобьем сечение на бесчисленное множество бесконечно тонких колец. В выражении

$$I_p = \int_F \rho^2 dF$$

за элемент площади dF примем площадь одного из указанных колец $dF = 2\pi\rho d\rho$

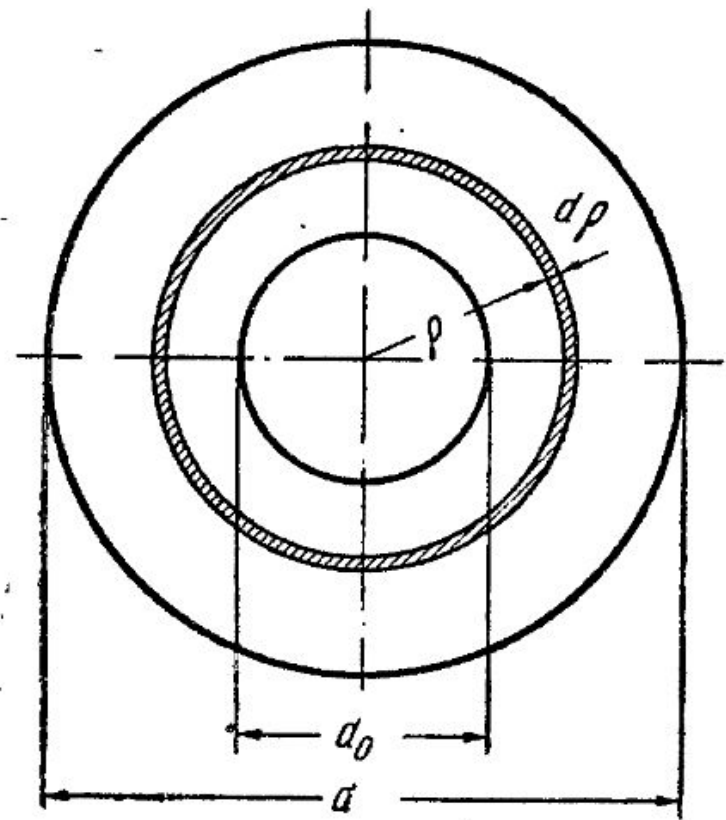


Рис.

Площадь весьма тонкого кольца можно вычислить, как площадь прямоугольника со сторонами $2\pi\rho$ и $d\rho$. Подставляя значение dF в выражение для I_p , и интегрируя, получаем

$$I_p = \int_{\frac{d_0}{2}}^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4)$$

Для
круга

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Полярный момент сопротивления для кольца

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{d^3}{16} (1 - c^4) \quad \text{где} \quad c = \frac{d_0}{d}$$

Полярный момент сопротивления для
круга

$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{d^3}{16}$$

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Прочность бруса, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном поперечном сечении, не превышают допускаемых:

$$\tau_{\max} \leq [\tau_k]$$

Наибольшие напряжения возникают в точках контура поперечного сечения и вычисляются по формуле (8). Таким образом, получаем следующее расчетное уравнение (условие прочности)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau_k] \quad (9)$$

Формула (9) служит для **проверочного расчета** на прочность.

Для **проектного расчета**

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau_k]}$$

Определение допускаемой нагрузки

$$[M_z] \leq W_p [\tau_k]$$

Крутящий момент (M_z), который входит в приведенные расчетные формулы, с помощью метода сечений должен быть выражен через внешние (скручивающие) моменты.

Расчет ведется для опасного поперечного сечения. Для бруса постоянного диаметра опасным является сечение, в котором возникает наибольший крутящий момент. Если диаметр бруса не постоянен, может оказаться, что наибольшие напряжения возникают не там, где крутящий момент максимален, следовательно, в этом случае вопрос об опасном сечении должен быть исследован дополнительно. Допускаемое напряжение $[\tau_k]$ для пластичных материалов назначают в зависимости от их предела текучести на кручение (на сдвиг) $\tau_{k'}$, т. е.

$$[\tau_k] = \frac{\tau_{k'}^y}{[n_y]}$$

Допускаемые напряжения для хрупких материалов назначают в зависимости от предела прочности

$$[\tau_k] = \frac{\tau_u}{[n_u]}$$

Во многих случаях вал должен быть **рассчитан** не только на прочность, но и на **жесткость** при кручении.

В качестве меры **жесткости при кручении** принимают **относительный угол закручивания** (угол закручивания на единицу длины) вала, обозначаемый ϕ_0 (встречается обозначение θ)

Допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала. Величины допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны: в качестве наиболее распространенных значений можно указать $[\varphi_0] = (4,38 \div 17,5) \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = (0,25 \div 1,0) \text{ град/м}$.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p} \leq [\varphi_0]$$

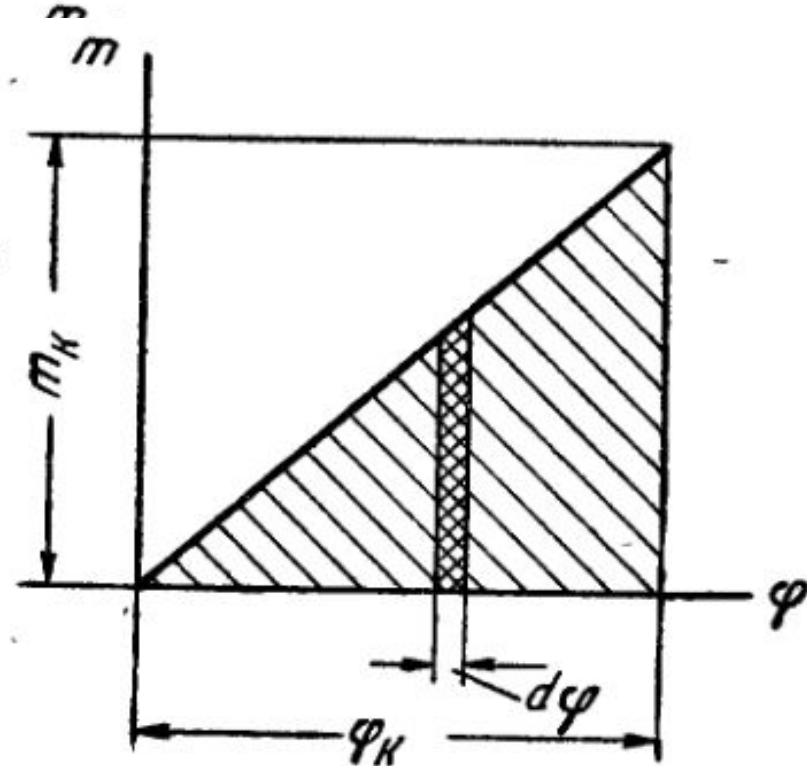
Из двух значений диаметра вала, определенных из расчетов на прочность и жесткость, в качестве окончательного (исполнительного размера) должен быть, конечно, принят больший.

ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

При кручении так же, как и при других видах деформации бруса, **работа внешних сил** (скручивающих моментов) расходуется на создание в деформированном теле определенного **запаса энергии (потенциальной энергии деформации)**. Выведем формулу для определения этой энергии, рассматривая брус, жестко заделанный одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом m (см. рис. 1).

Как и ранее, будем считать, что нагружение осуществляется статически в пределах справедливости закона Гук.

Таким образом, зависимость между скручивающим моментом и углом закручивания линейная.



Из курса теоретической механики известно, что работа момента (пары сил) равна его произведению на угол поворота.

При приращении угла поворота на величину $d\varphi$ соответствующая элементарная работа

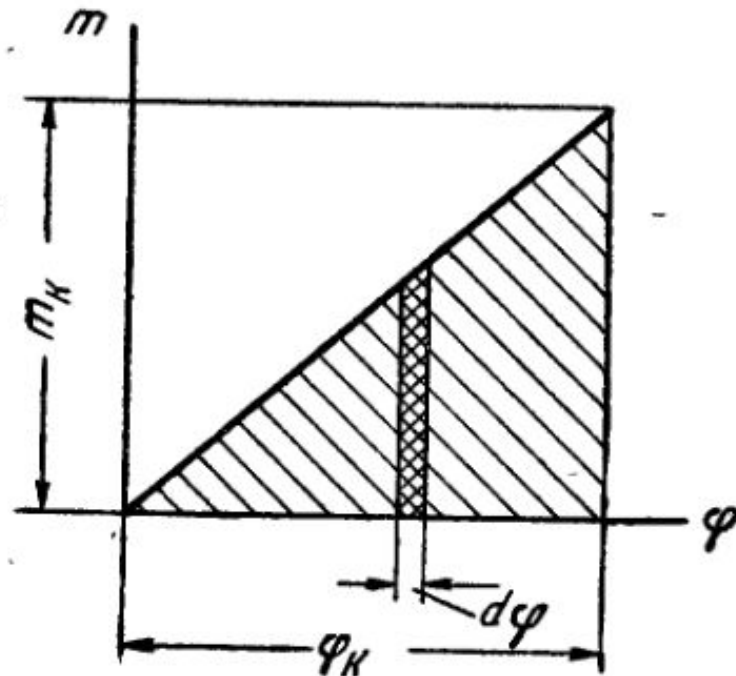
$$dA = m d\varphi$$

Эта работа выражается на графике площадью густо заштрихованной трапеции, которую по малости $d\varphi$ можно рассматривать как

прямоугольник.

Вся работа, очевидно, выразится площадью заштрихованного треугольника, т. е.

$$A = \frac{m_k \varphi_k}{2} \quad (10)$$



Последнее выражение *представляет собой теорему Клапейрона* для случая кручения.

Учитывая, что работа внешних сил (моментов) равна энергии деформации и в рассматриваемом случае крутящий момент во всех сечениях

одинаков $M_{zk} = m_k$, имеем

$$U = A = \frac{M_{zk} \varphi_k}{2}$$

Опуская индекс «к» и выражая угол закручивания

по формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}$$

получи
м

$$U = \frac{M_z^2 l}{2GI_p}$$

В последнем выражении $M_z = \text{const}$ и $I_p = \text{const}$.

При ступенчатом изменении сечения или крутящего момента

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}^2 l_i}{2GI_{pi}}, \quad \begin{array}{l} n - \text{количество} \\ \text{участков} \end{array}$$

В случае, если M_z или I_p (или обе эти величины) изменяются по длине отдельных участков непрерывно, следует пользоваться формулой

$$U = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{zi}^2}{2GI_{pi}} dl_i$$

Все приведенные здесь формулы справедливы и для брусьев некруглого сечения при замене I_p на I_k

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

В произвольной точке поперечного сечения бруса возникает касательное напряжение, определяемое по формуле (7). В продольном (меридиональном) сечении, проходящем через ту же точку, возникает такое же по величине напряжение, что следует из закона парности касательных напряжений. Распределение этих напряжений показано на рис.5

По площадкам, касательным к цилиндрическим поверхностям любого радиуса, напряжения отсутствуют.

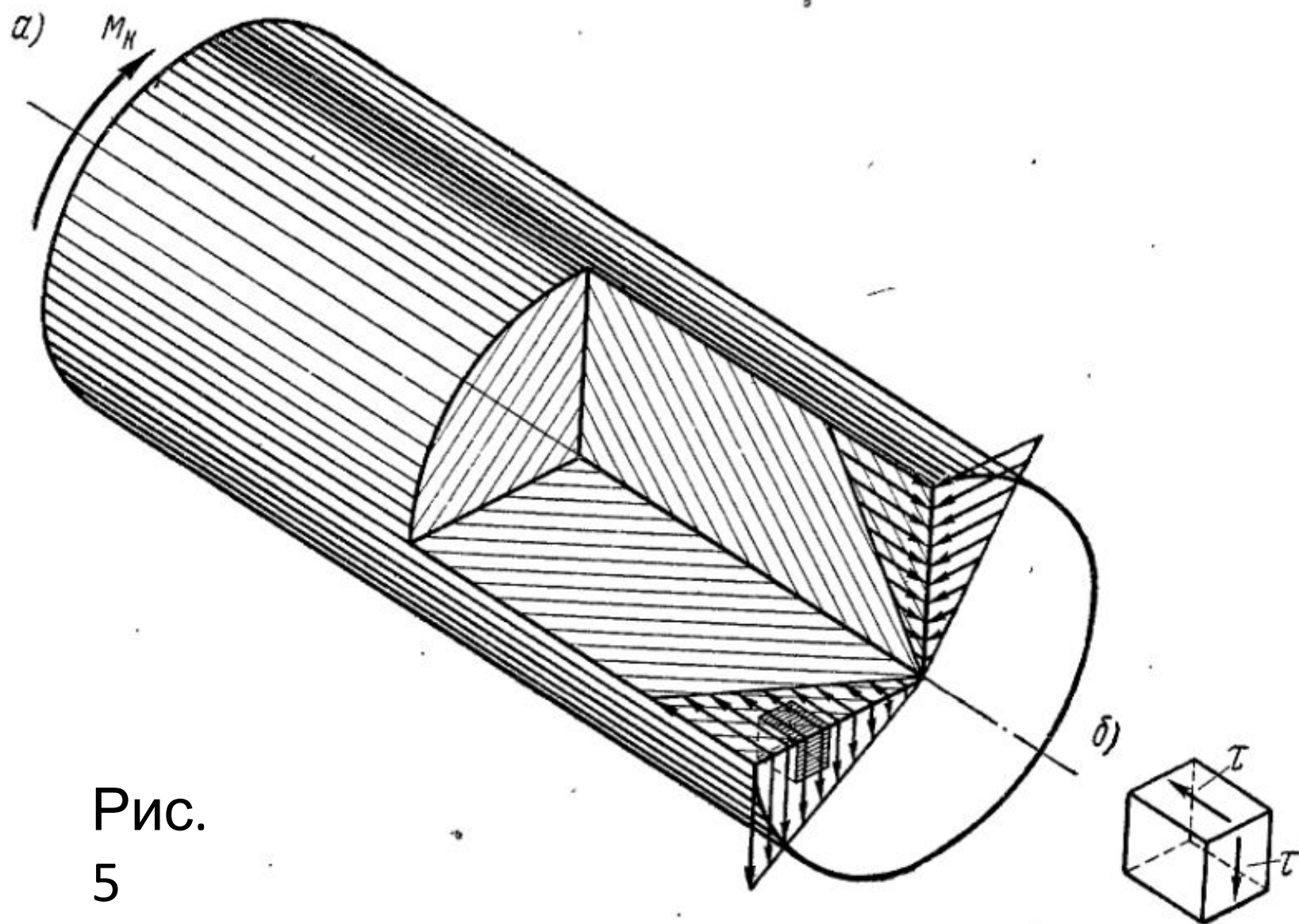
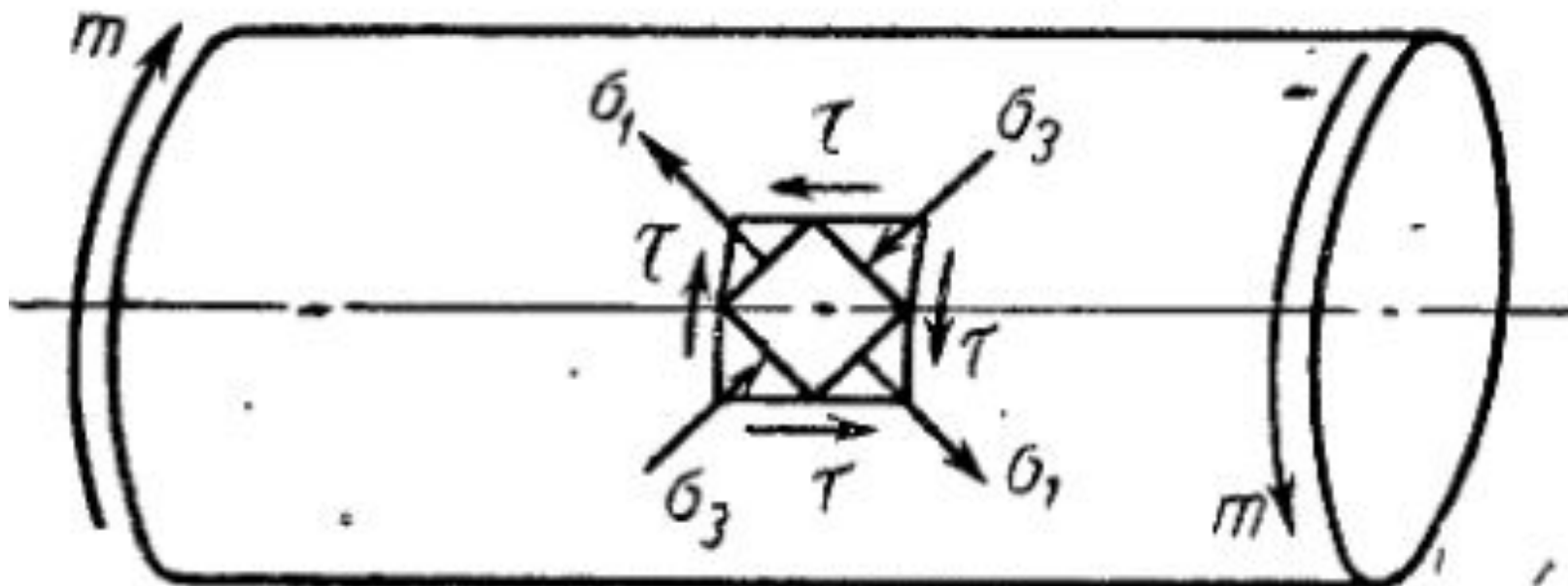


Рис.
5

Площадки действия и направления
максимальных касательных и главных
напряжений для элемента у поверхности
скрученного бруса



Чугун сопротивляется растяжению значительно хуже, чем сжатию, и даже хуже, чем сдвигу, поэтому при кручении чугунный образец разрушается по винтовой поверхности, наклоненной под углом примерно 45° к продольной оси бруса, то есть под действием растягивающих нормальных напряжений (рис. 6) Трещины, образующиеся на поверхности бруса, в каждой ее точке совпадают с площадками действия главного растягивающего напряжения

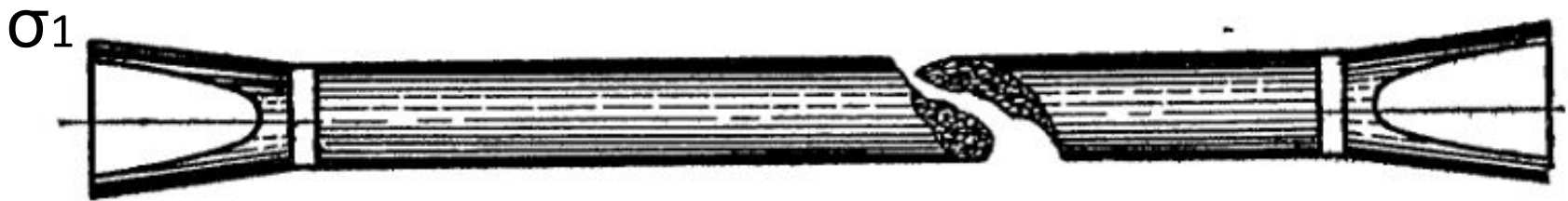


Рис.

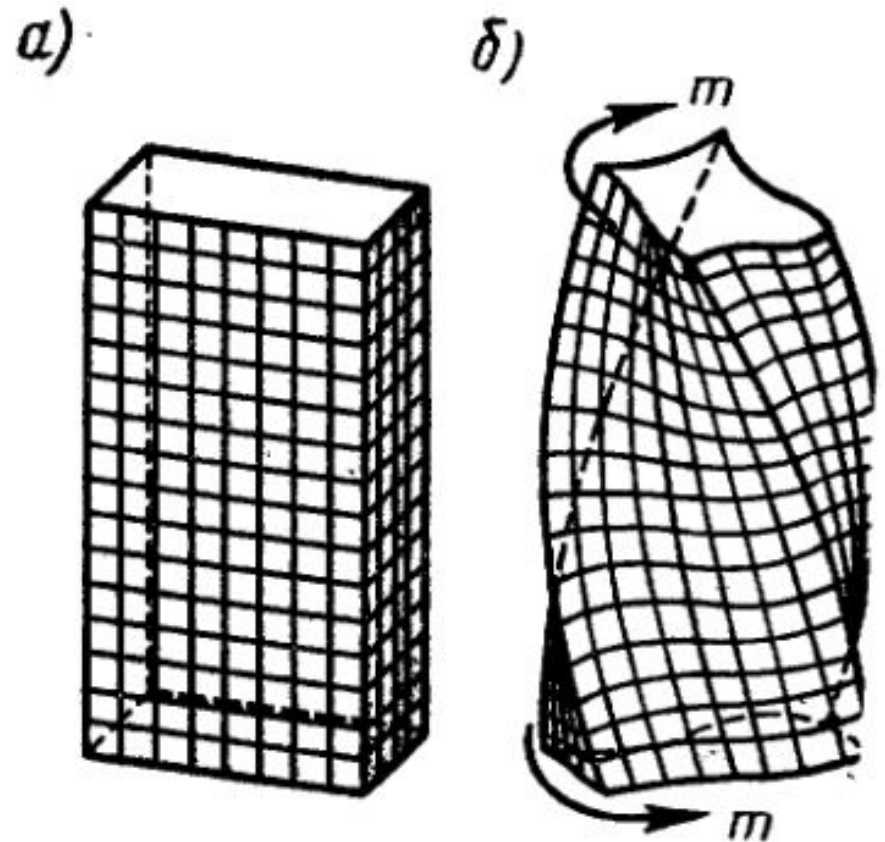
КРУЧЕНИЕ БРУСА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении брусьев с некруглым поперечным сечением гипотеза Бернулли неприменима. Это обстоятельство не позволяет применить методы сопротивления материалов для решения задачи о напряжениях и перемещениях, возникающих при кручении таких брусьев.

Для целого ряда сечений, в частности для прямоугольного, эта задача решена методами теории упругости.

Характер деформации скручиваемого бруса прямоугольного сечения можно наблюдать на резиновой модели с нанесенной на ее поверхности сеткой продольных и поперечных рисок

Коробление поперечных сечений, получающееся в результате того, что отдельные их точки при деформации смещаются вдоль оси бруса неодинаково, называется *депланацией*.



Эпюры касательных напряжений для точек контура поперечного сечения показаны на рис. 7.

В указанных точках напряжения направлены вдоль контура.

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, лежащих в серединах больших сторон сечения.

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k}$$

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max}$$

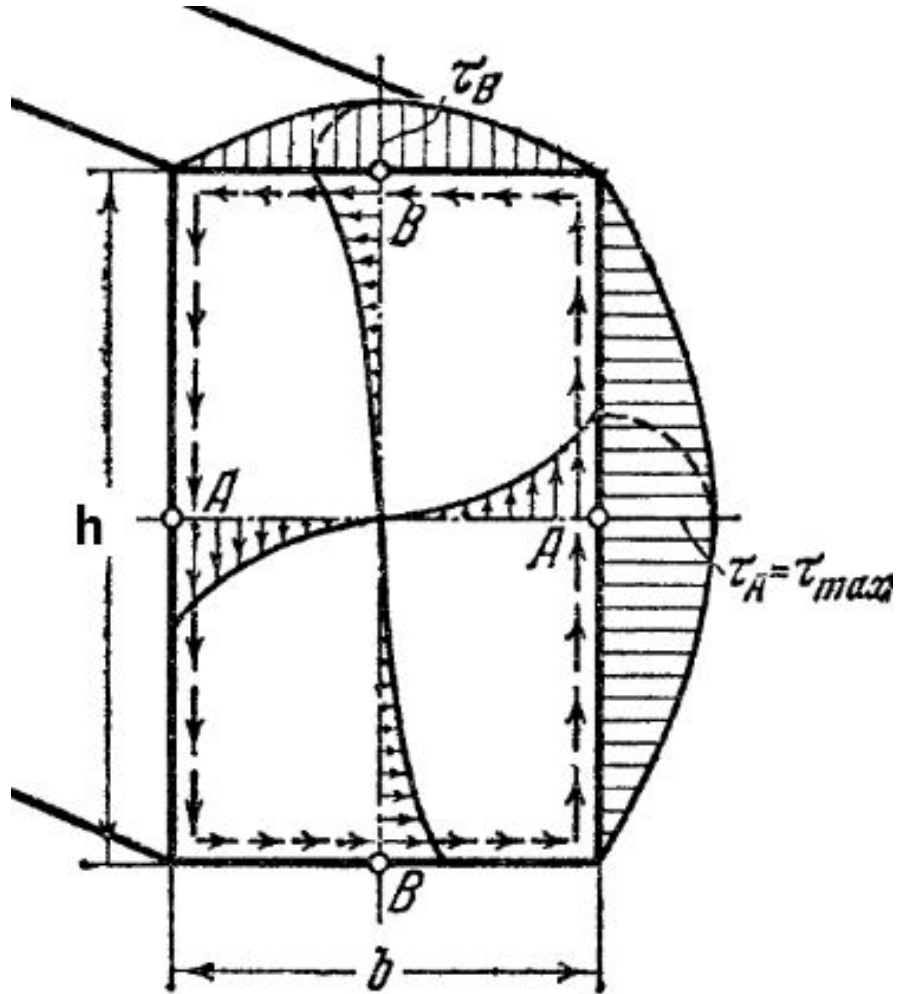


Рис.

W_k — геометрическая характеристика прочности некруглого бруса при его работе на кручение. Эта характеристика играет в расчетах некруглых брусьев ту же роль, что и полярный момент сопротивления для брусьев круглого сплошного и кольцевого поперечных сечений.

$$W_k = \alpha b^2 h$$

b — меньшая сторона прямоугольника,
 α — табличный коэффициент, зависящий от отношения $h:b$

Угол закручивания участка бруса при постоянных крутящем моменте и размерах сечения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_k}$$

I_k —геометрическая характеристика крутильной жесткости некруглого бруса, вычисляемая по формуле

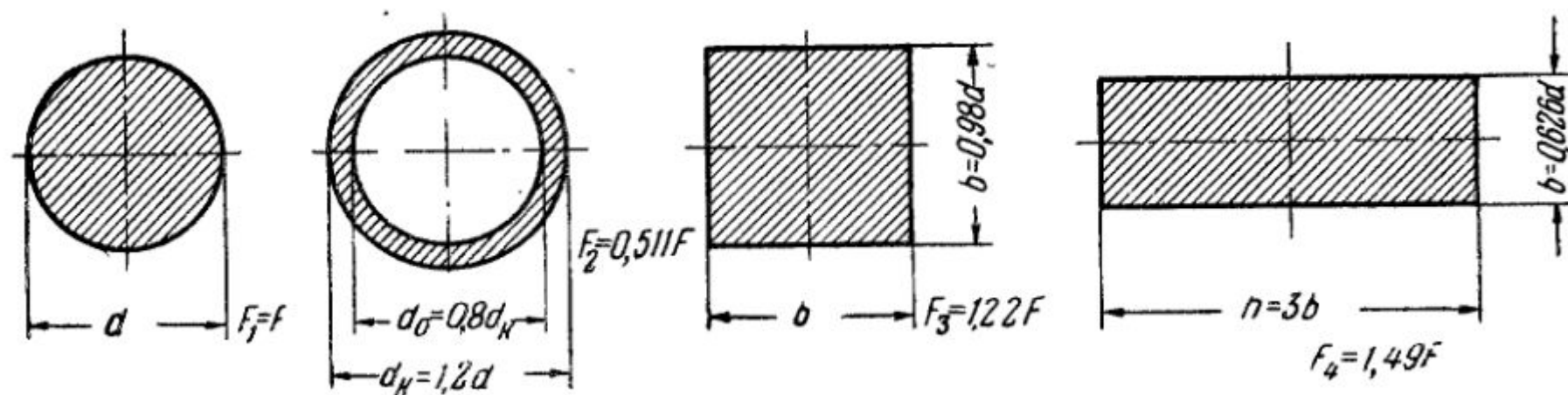
$$I_k = \beta b^3 h$$

β - табличный коэффициент, зависящий от отношения $h:b$

Коэффициенты для определения геометрических характеристик W_k и I_k

	1	1,5	2	2,5	3	4	5	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,307	0,312	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,307	0,312	0,333
γ	1	0,86	0,79	0,77	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74

Прочность и жесткость *прямоугольного* бруса при кручении значительно **ниже**, чем круглого с равновеликой площадью сечения. Эта разница возрастает с увеличением отношения сторон прямоугольника. Рис. 8 дает представление об относительной затрате материала при применении брусьев с различными формами поперечного сечения (при условии их



КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ ТОНКОСТЕННОГО ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

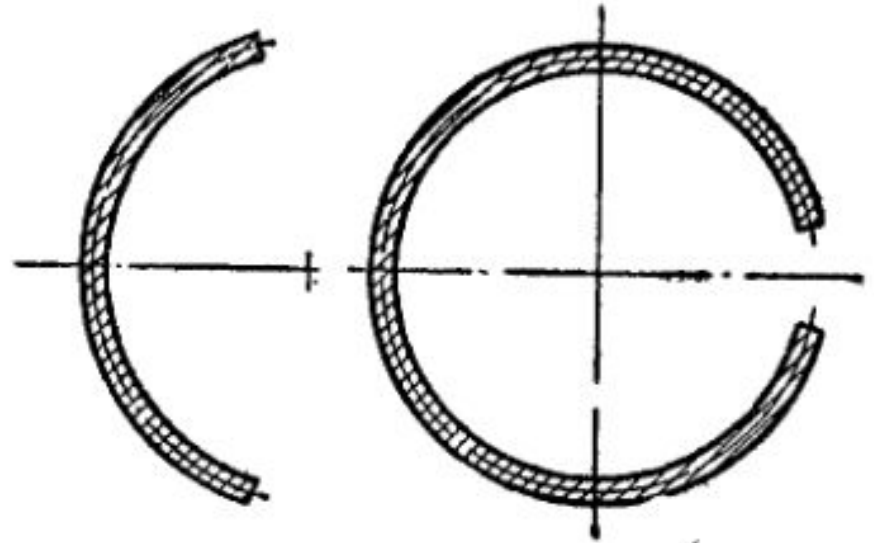
Для прямоугольного сечения при отношении $h: b > 5$ коэффициенты α и β стремятся к одному и тому же значению: $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. Следовательно, для бруса, поперечное сечение которого представляет собой вытянутый прямоугольник (полосу), геометрические характеристики прочности и жесткости могут быть вычислены по формулам

$$I_k = \frac{1}{3} h \delta^3 \qquad W_k = \frac{1}{3} h \delta^2$$

δ - меньшая сторона прямоугольника (толщина полосы).

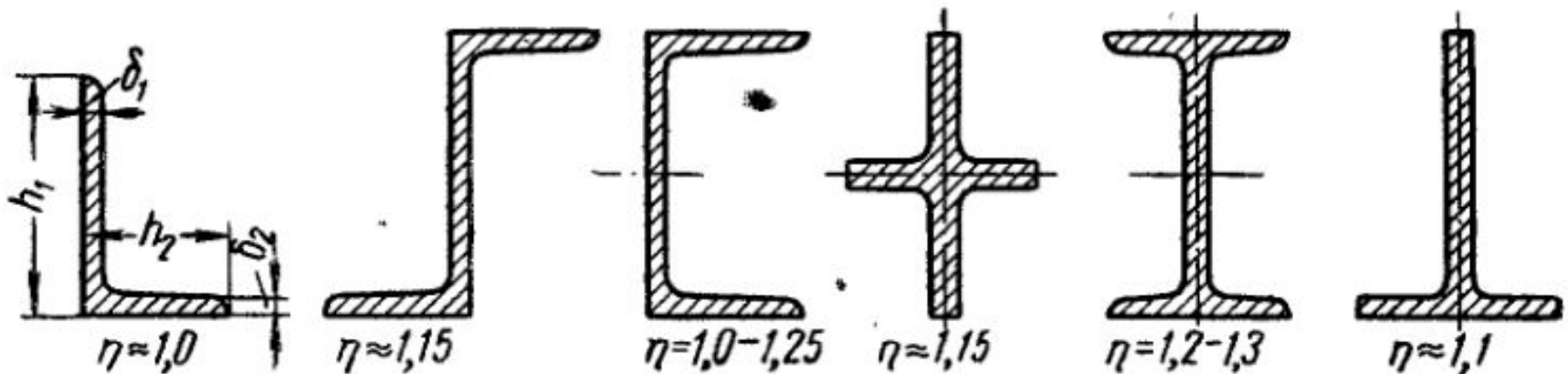
Эти же формулы применимы и для незамкнутых тонкостенных сечений, ограниченных кривыми линиями.

При этом под h следует понимать большую сторону прямоугольника, в который обратится сечение, если его мысленно распрямить.



Для тонкостенных сечений, которые можно рассматривать состоящими из отдельных узких полос с отношением сторон $h_i: \delta_i > 5$, геометрическая характеристика крутильной жесткости может быть определена по следующей приближенной формуле:

$$I_k = \sum \frac{h_i^3 \delta_i}{3} \quad I_k = \eta \sum \frac{h_i^3 \delta_i}{3}$$



η - поправочный коэффициент, зависит от формы сечения

Для определения относительного угла закручивания служит формула

$$\varphi_0 = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p}$$

Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, во всех его точках направлены параллельно контуру. Наибольшие напряжения возникают в средних точках длинных сторон прямоугольника, имеющего наибольшую толщину

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_k} = \frac{M_z \delta_{\max}}{I_k}$$

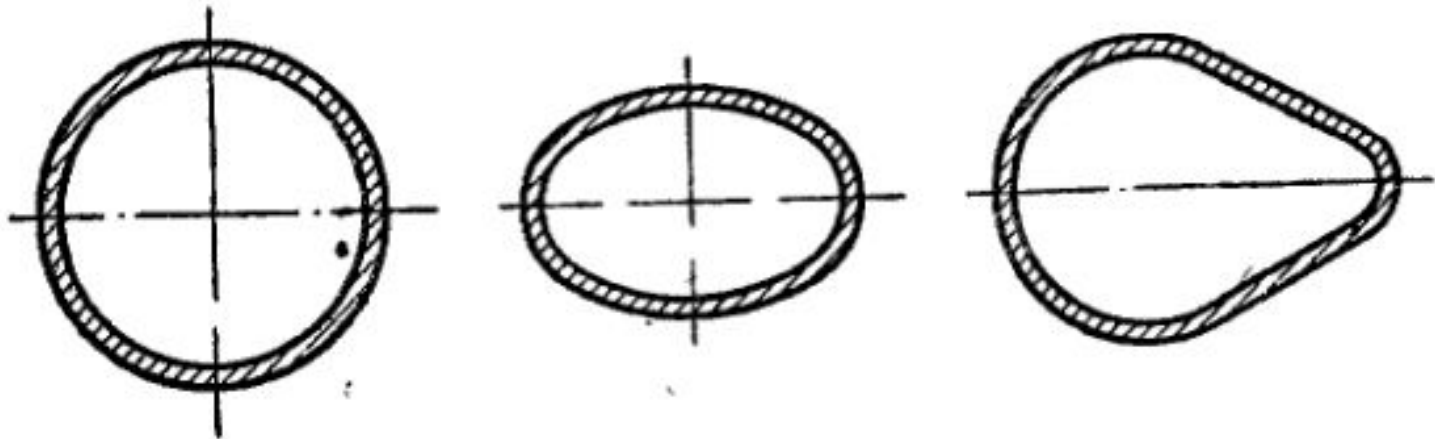
При вычислении напряжений поправочный коэффициент η не учитывают, т. е. величину I_k вычисляют по формуле

$$I_k = \sum \frac{h_i \delta_i}{3}$$

Применение для **работающих на кручение** элементов конструкций брусьев **тонкостенного незамкнутого** (открытого) профиля **не выгодно**: их жесткость и прочность существенно **ниже**, чем брусьев круглого поперечного сечения (при равной площади сечения, т. е. при одинаковой затрате материала).

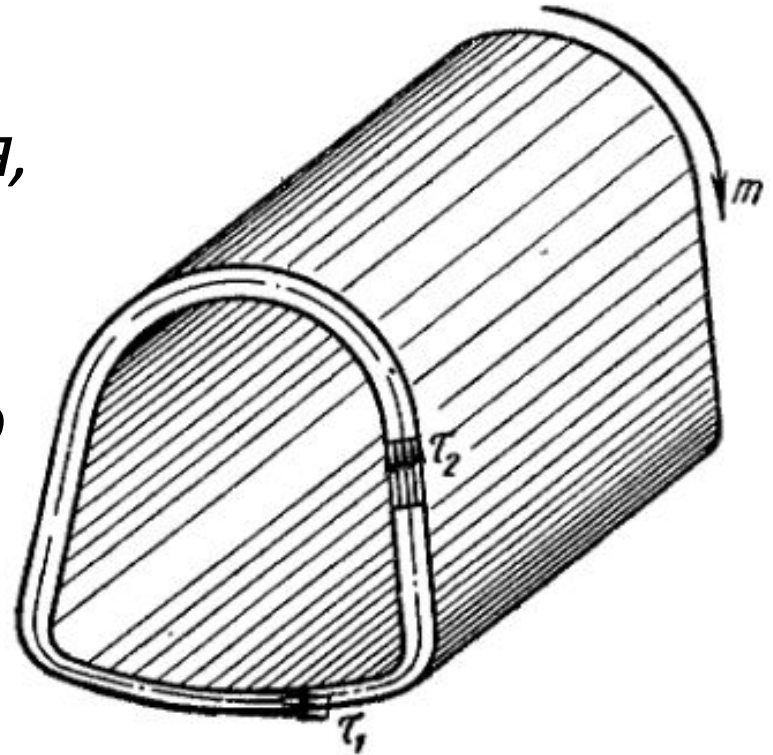
КРУЧЕНИЕ БРУСЬЕВ ТОНКОСТЕННОГО ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

Трубчатые тонкостенные брусья различного профиля широко применяют в авиационных и ряде других конструкций для уменьшения их веса. Жесткость и прочность таких брусьев при кручении существенно выше, чем тонкостенных брусьев, открытого профиля при одинаковой затрате материала



Вывод формул для определения **напряжений и углов** закручивания основан на следующих двух допущениях.

1. Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении работающего на кручение бруса, равномерно распределены по толщине стенки профиля.



2. Касательные напряжения в любом месте профиля направлены параллельно касательной к средней линии стенки в рассматриваемом месте.

Выделим из скручиваемой трубы (рис.8) двумя произвольными сечениями $A-A$ и $B-B$ некоторую ее часть, показанную отдельно на рис. 9. На основе закона парности касательных напряжений в продольных сечениях трубы возникают такие же касательные напряжения, как и в соответствующих м

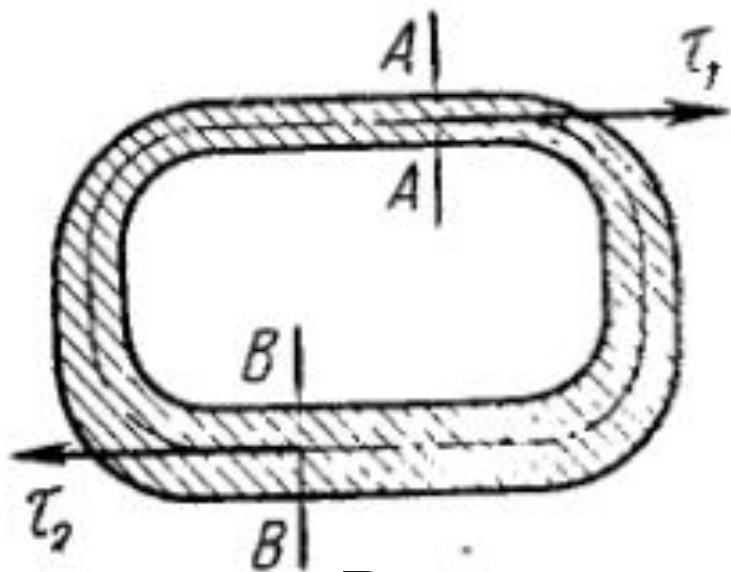


Рис.
8

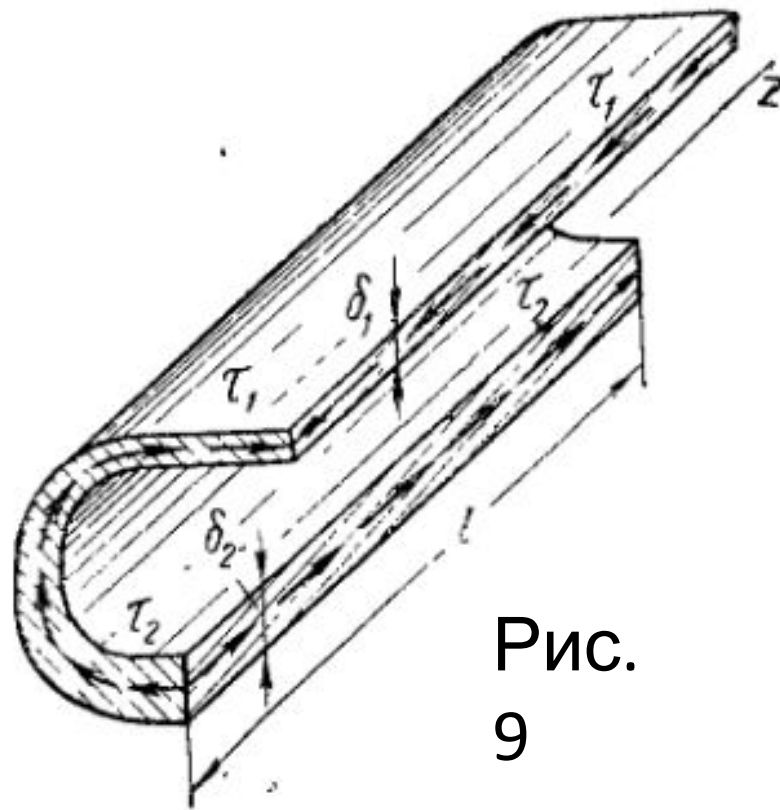


Рис.
9

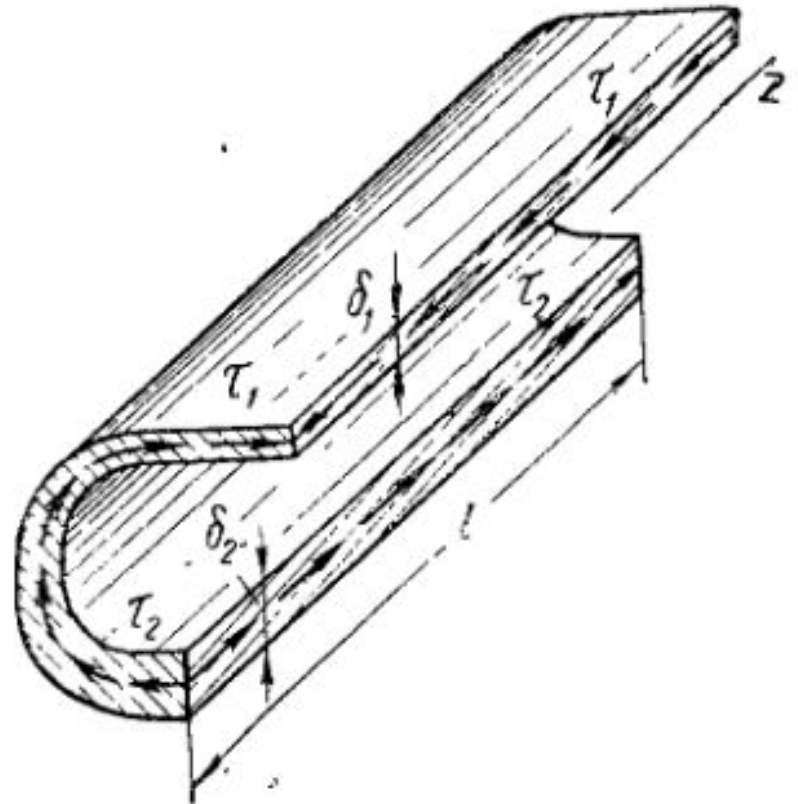
Из условия равновесия выделенной части трубы, проектируя действующие на нее силы на ось z , получаем

$$-\tau_1 \cdot \delta_1 \cdot l + \tau_2 \cdot \delta_2 \cdot l = 0$$

откуда $\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$

а

Так как сечения А-А и В-В были выбраны совершенно произвольно, то, следовательно, произведение $\tau \cdot \delta$ одинаково в любом месте контура.



Как известно, **крутящий момент** представляет собой результирующий **момент внутренних касательных сил**, возникающих в поперечном сечении бруса,

$$M_z = \int_s \tau \cdot \delta \cdot h \cdot ds$$

где ds — длина элемента средней линии стенки трубы,

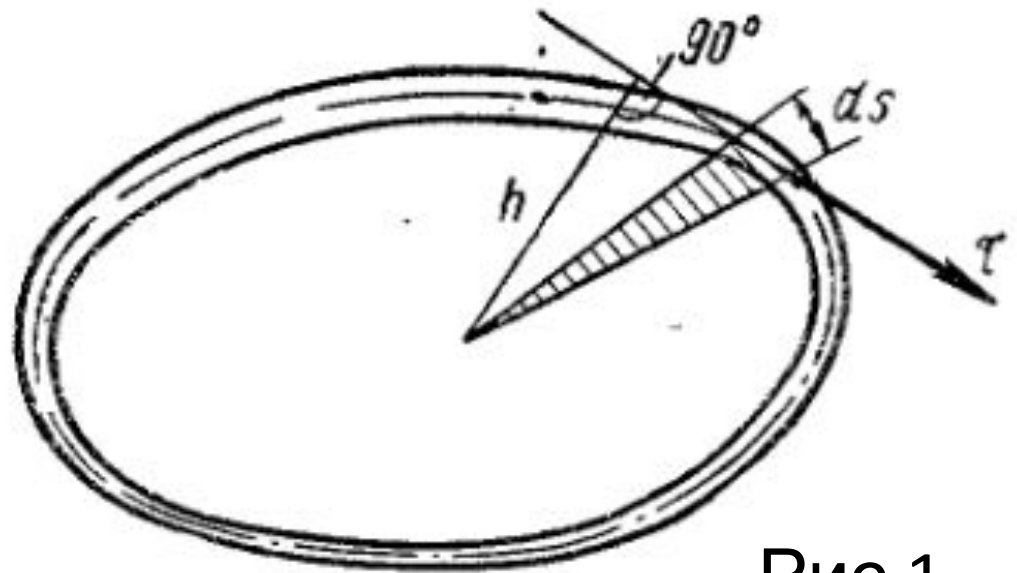


Рис.1
0

h — плечо элементарной силы ($\tau \cdot \delta \cdot ds$), возникающей на площадке $\delta \cdot ds$.

Суммирование (интегрирование)
распространяется на всю длину средней линии
стенки.

Согласно доказанному выше, произведение $\tau \cdot \delta$ —
величина постоянная и может быть вынесена за
знак интеграла:

$$M_x = \tau \delta \int_s h ds$$

Произведение $h ds$ представляет собой удвоенную
площадь ($d\omega$) треугольника, заштрихованного на
рис.10

$$h ds = 2 d\omega$$

Следовательно $\int_0 h ds = 2\omega$

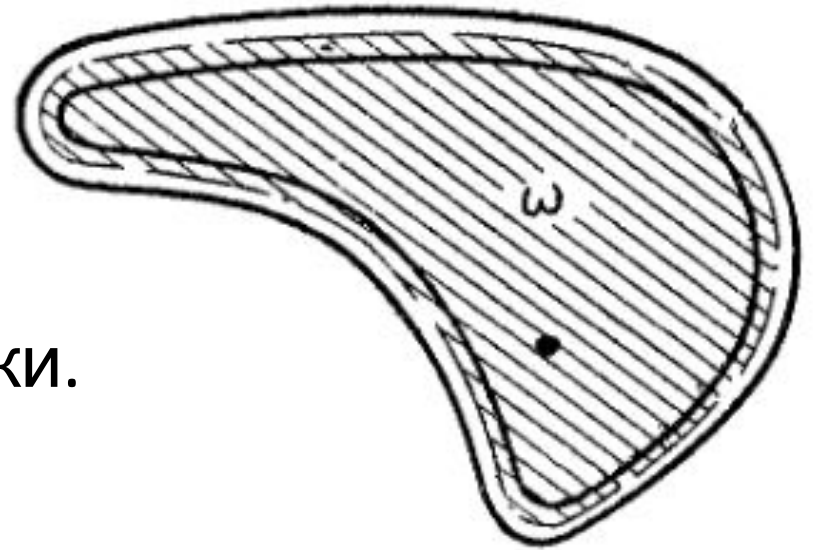
ω - площадь, ограниченная средней линией стенки трубки.

Таким образом, отсюда $M_z = 2\tau\delta\omega$

$$\tau = \frac{M_z}{2\omega\delta} \quad (11)$$

Наибольшего значения напряжение достигает там, где стенка трубы имеет **минимальную толщину**, и, следовательно, условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2\omega\delta_{\min}} \leq [\tau_k] \quad (12)$$



Если профиль имеет **входящие углы**, например, прямоугольное коробчатое сечение, то эти углы должны быть **скруглены**, так как в противном случае там возникают **высокие местные напряжения** (явление так называемой концентрации напряжений), значительно превышающие $T_{\max}$.

Отметим, что в **брусьях открытого тонкостенного профиля** наибольшее напряжение возникает в самых **толстых частях** профиля, а при замкнутом профиле — самых узких его местах.

Для определения угла закручивания
 приравняем работу, совершаемую
 скручивающим моментом, энергии деформации,
 накапливаемой бруском (13)

По формуле (10)
$$A = \frac{m\varphi}{2} = \frac{M_z \varphi}{2}$$

рассматриваем случай, когда крутящий момент
 во всех поперечных сечениях бруса одинаков.

Энергия деформации, накапливаемая в
 элементе объема $dV = (\delta \cdot ds) l$ трубы

где $U_o = \frac{\tau^2}{2G}$ - удельная потенциальная
 энергия $dU = U_o dV$

Тогда $dU = \frac{\tau^2}{2G} \delta l ds$

Интегрирование левой и правой частей последнего выражения дает

$$U = \int_s \frac{\tau^2}{2G} \delta l ds$$

Подстановка значений A и U в зависимость (13) дает

$$\frac{M_z \varphi}{2} = \int_s \frac{\tau^2}{2G} \delta l ds$$

Заменяя τ по формуле (11), имеем

$$\frac{M_z \varphi}{2} = \int_s \frac{M_z^2}{2G4\delta^2\omega^2} \delta l ds$$

Откуда
окончательно

$$\varphi = \frac{M_z l}{4G\omega^2} \int_s \frac{ds}{\delta} \quad (14)$$

В случае постоянной толщины
стенки

$$\varphi = \frac{M_z l s}{4G\omega^2 \delta} \quad (15) \quad s - \text{длина средней линии стенки}$$

Зависимости (11), (14) и (15) называют формулами Бредта.

Можно доказать, что **из всех тонкостенных брусьев замкнутого профиля**, имеющих одинаковую толщину стенки и длину ее средней линии (т. е. при одинаковой затрате материала), **наибольшей жесткостью и прочностью** обладает брус, сечение которого — **круговое кольцо**.

Из формул (12) и (14) следует, что геометрические характеристики прочности и жесткости при кручении для рассматриваемых брусьев определяются выражениями

$$W_k = 2\omega\delta_{\min}$$

$$I_k = \frac{4\omega^2}{\int_s \frac{ds}{\delta}}$$

В случае постоянной толщины стенки

$$I_k = \frac{4\omega^2\delta}{s}$$

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СЛУЧАИ РАСЧЕТА НА КРУЧЕНИЕ

Задача расчета на кручение является статически неопределимой, если крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях бруса, не могут быть определены с помощью одного лишь метода сечений.

Для ее решения дополнительно к уравнениям статики должны быть составлены уравнения перемещений, основанные на анализе геометрических условий деформации рассчитываемой системы.

Пример.2