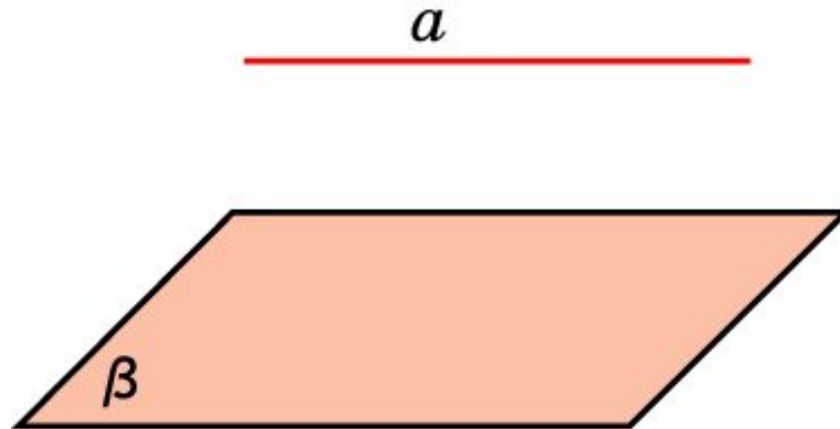
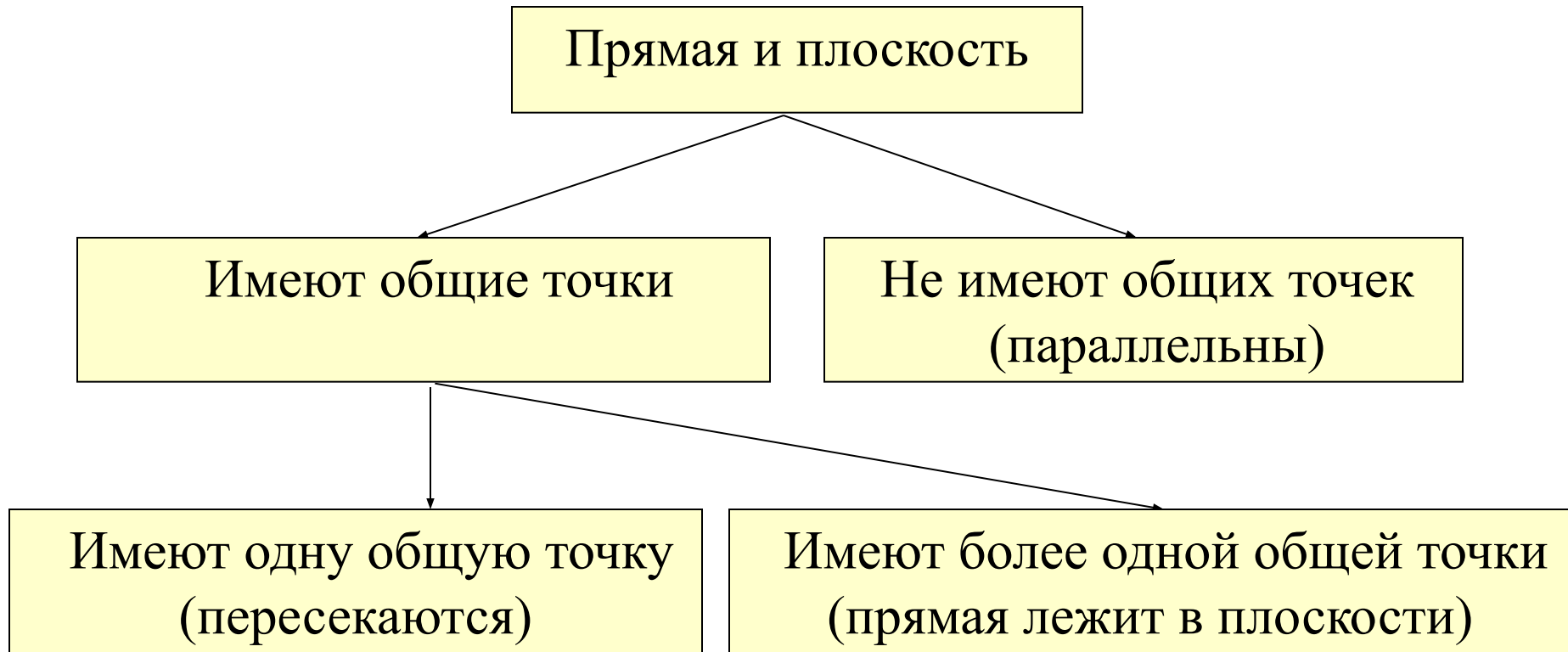


ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Определение. Прямая называется параллельной плоскости, если она не имеет с ней ни одной общей точки.

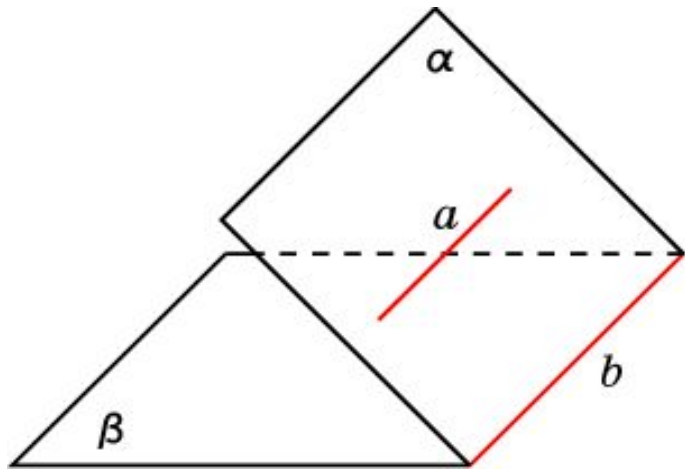


Взаимное расположение прямой и плоскости



Параллельности двух прямых

Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия их пересечения параллельна данной прямой.

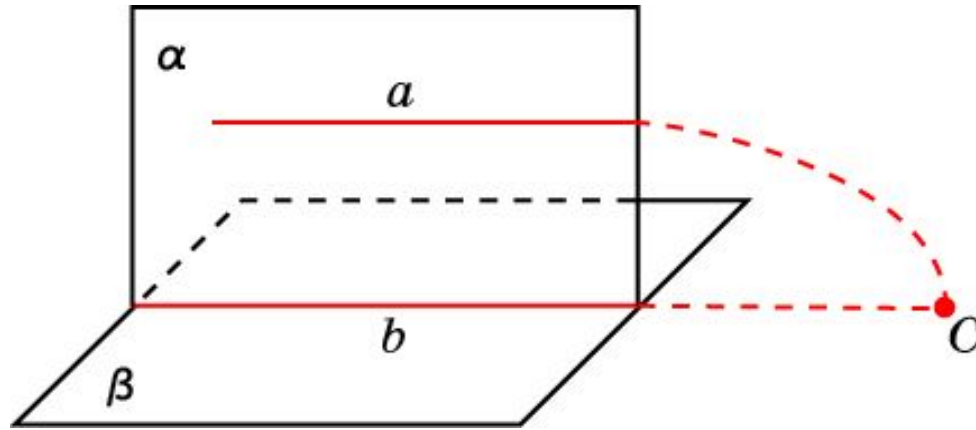


Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a , параллельную плоскости β , и прямая b является линией пересечения этих плоскостей. Докажем, что прямые a и b параллельны.

Действительно, они лежат в одной плоскости α . Кроме этого, прямая b лежит в плоскости β , а прямая a не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая a и подавно не пересекается с прямой b . Таким образом, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны.

Признак параллельности прямой и плоскости

Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то данная прямая параллельна самой плоскости.



Доказательство. Пусть прямая a не лежит в плоскости β и параллельна прямой b , лежащей в этой плоскости. Докажем, что прямая a параллельна плоскости β .

Предположим противное, т.е., что прямая a пересекает плоскость β в некоторой точке C .

Рассмотрим плоскость α , проходящую через прямые a и b ($a \parallel b$, по условию). Точка C принадлежит как плоскости β , так и плоскости α , т.е. принадлежит линии их пересечения - прямой b . Следовательно, прямые a и b пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, $a \parallel \beta$.

Упражнение 1

Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

Ответ: Нет.

Упражнение 2

Верно ли утверждение: "Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости"?

Ответ: Нет.

Упражнение 3

Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

Ответ: Нет.

Упражнение 4

Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

Ответ: Параллельна.

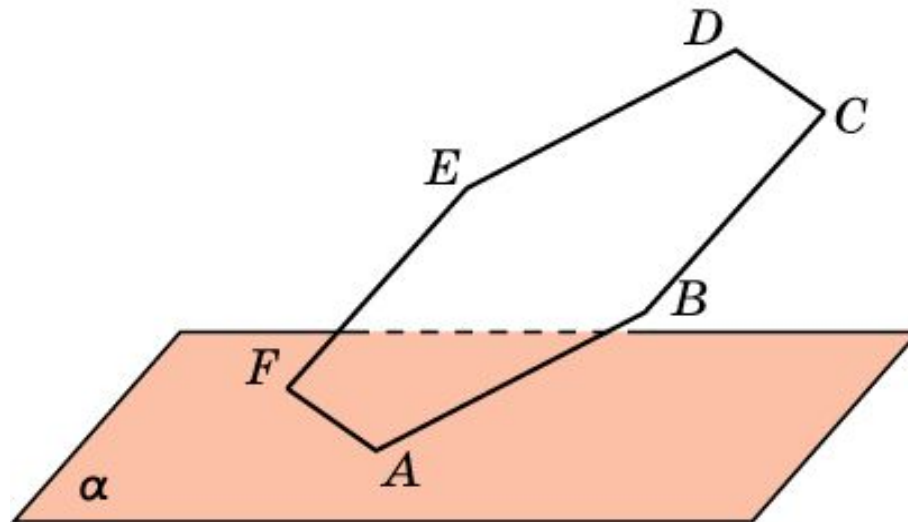
Упражнение 5

Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

Ответ: Да.

Упражнение 6

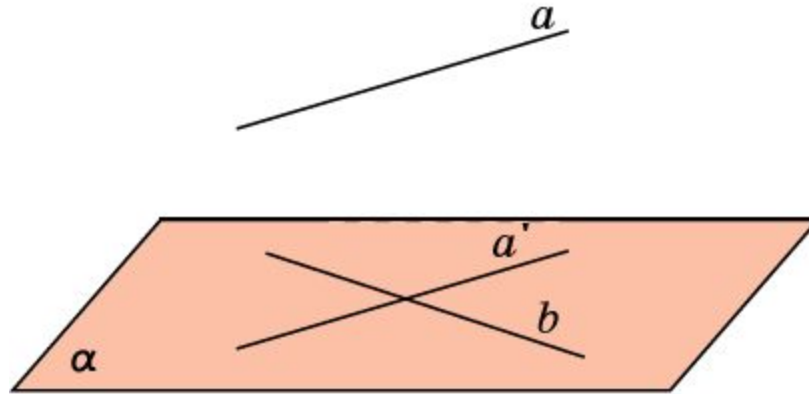
Сторона AF правильного шестиугольника $ABCDEF$ лежит в плоскости α , не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены прямые, содержащие остальные стороны этого шестиугольника, относительно плоскости α ?



Ответ: AB , BC , DE , EF пересекают плоскость; CD параллельна плоскости.

Упражнение 7

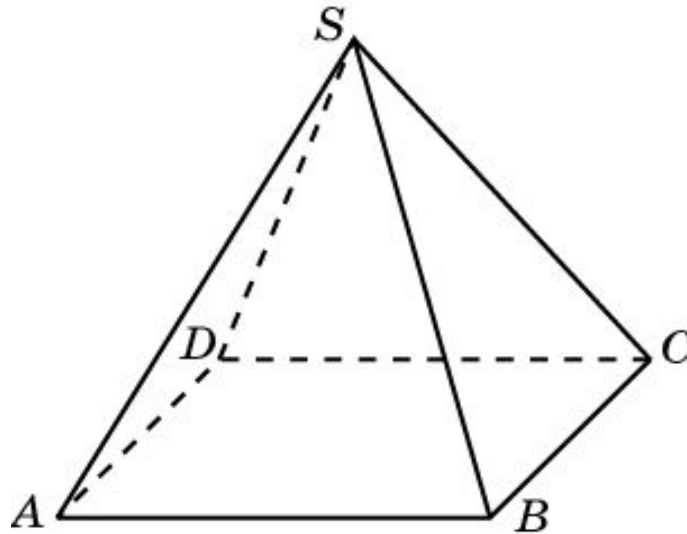
Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Как через одну из них провести плоскость, параллельную другой прямой?



Решение: Через точку прямой b проведем прямую a' , параллельную прямой a . Затем через полученные пересекающиеся прямые провести плоскость. Она будет параллельна второй данной прямой.

Упражнение 8

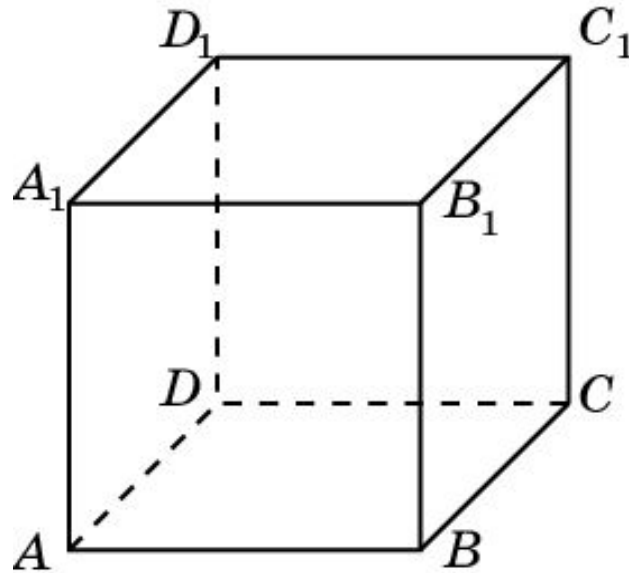
В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней SAB и SCD и плоскости основания $ABCD$?



Ответ: Параллельны.

Упражнение 9

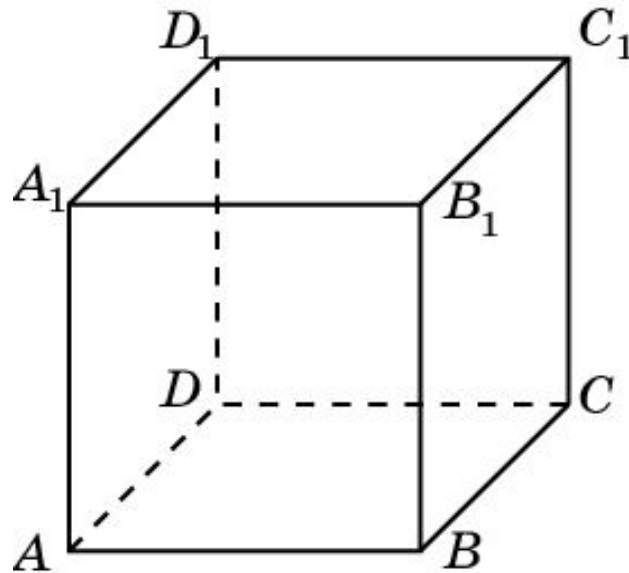
В кубе $A...D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, параллельные прямой: а) AA_1 ; б) AB_1 ; в) AC_1 .



Ответ: а) BCC_1 , CDD_1 , BDD_1 ;
б) CDD_1 , DA_1C_1 , BDC_1 ;
в) нет.

Упражнение 10

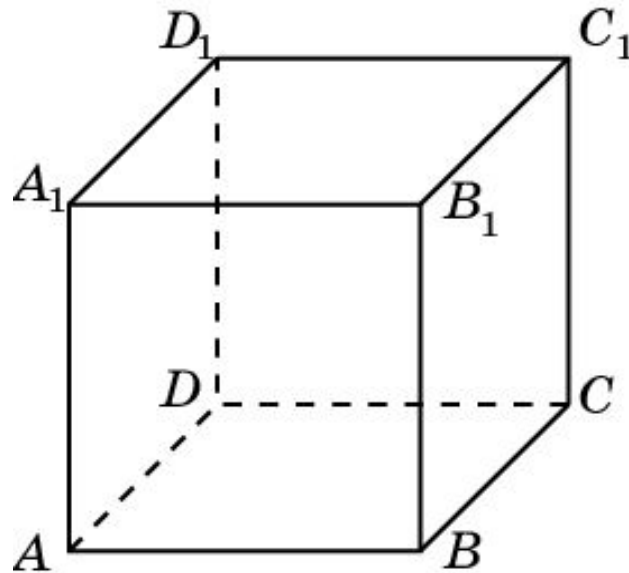
Докажите, что для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая AA_1 параллельна плоскости BCC_1 .



Доказательство: Прямая AA_1 параллельна прямой BB_1 , лежащей в плоскости BCC_1 . Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости BCC_1 .

Упражнение 11

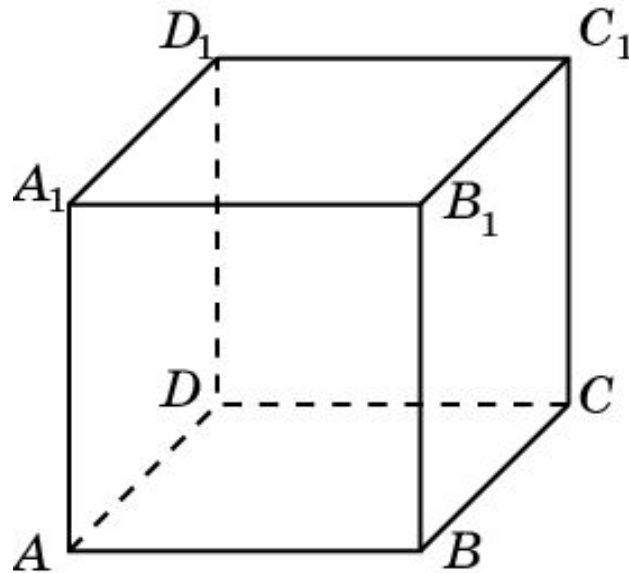
Докажите, что для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая AA_1 параллельна плоскости BDD_1 .



Доказательство: Прямая AA_1 параллельна прямой BB_1 , лежащей в плоскости BDD_1 . Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости BDD_1 .

Упражнение 12

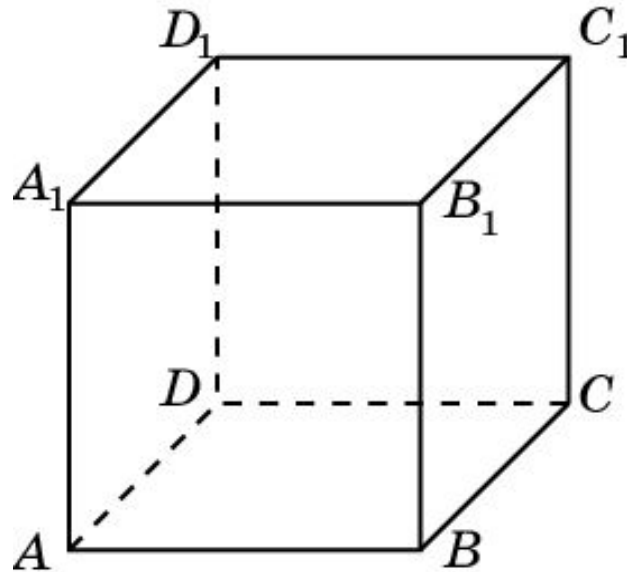
Докажите, что для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая AB_1 параллельна плоскости CDD_1 .



Доказательство: Прямая AB_1 параллельна прямой DC_1 , лежащей в плоскости CDD_1 . Следовательно, прямая AB_1 параллельна плоскости CDD_1 .

Упражнение 13

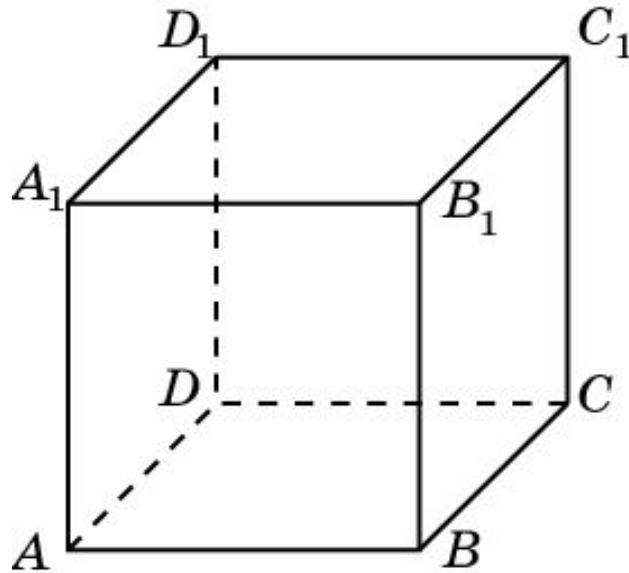
Докажите, что для куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая AB_1 параллельна плоскости BDC_1 .



Доказательство: Прямая AB_1 параллельна прямой DC_1 , лежащей в плоскости BDC_1 . Следовательно, прямая AB_1 параллельна плоскости BDC_1 .

Упражнение 14

Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра куба $A...D_1$?

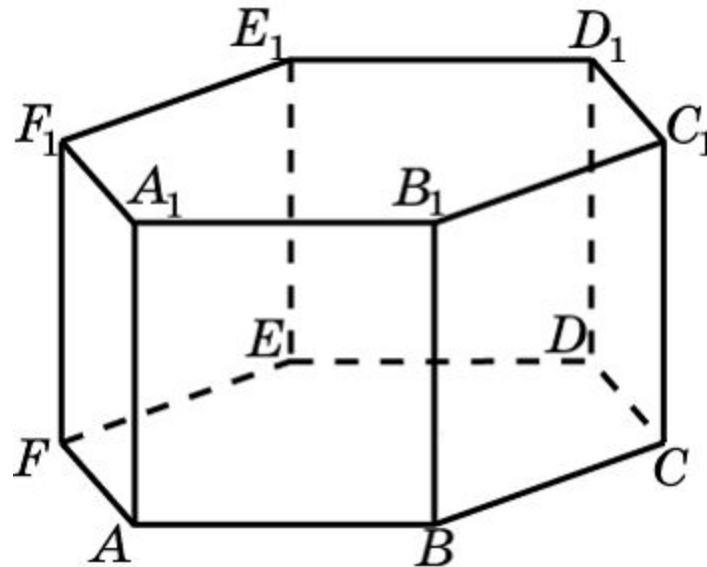


Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У куба имеется 12 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 24.

Упражнение 15

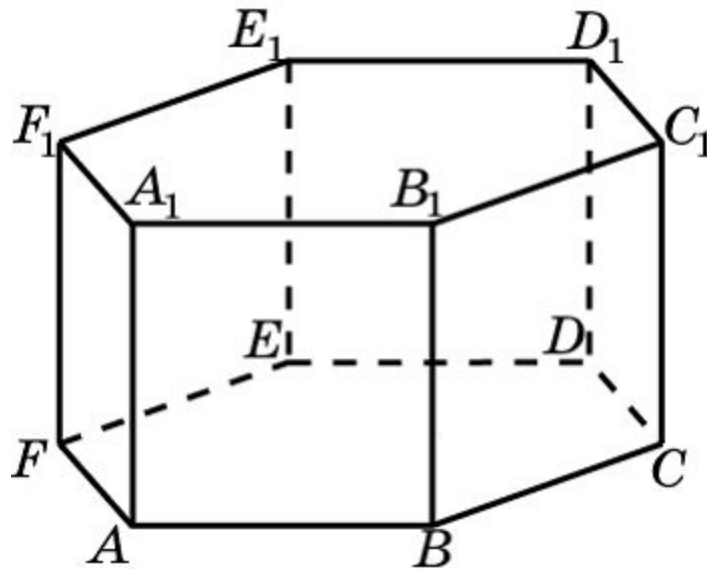
В правильной шестиугольной призме назовите плоскости, проходящие через ребра призмы и параллельные прямой: а) AB_1 ; б) AC_1 ; в) AD_1 .



Ответ: а) DEE_1, CFF_1 ;
 б) DFE_1 ;
 в) BCC_1, EFF_1 .

Упражнение 16

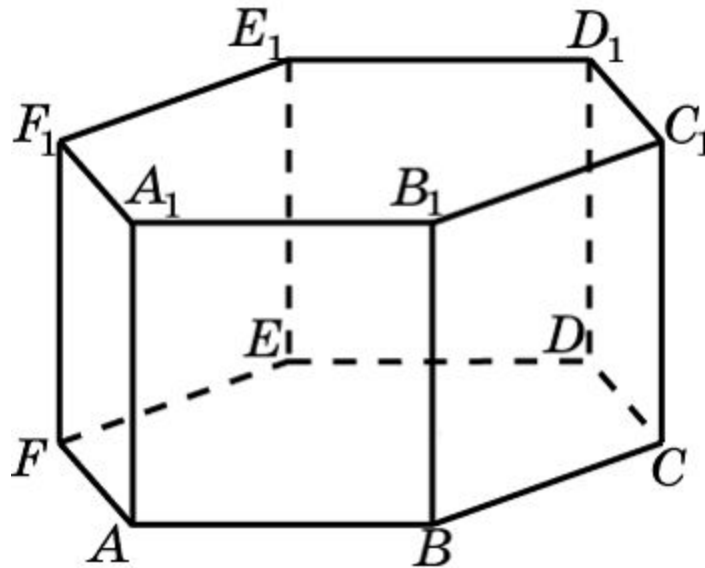
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ прямая AA_1 параллельна плоскости BCC_1 .



Доказательство: Прямая AA_1 параллельна прямой BB_1 , лежащей в плоскости BCC_1 . Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости BCC_1 .

Упражнение 17

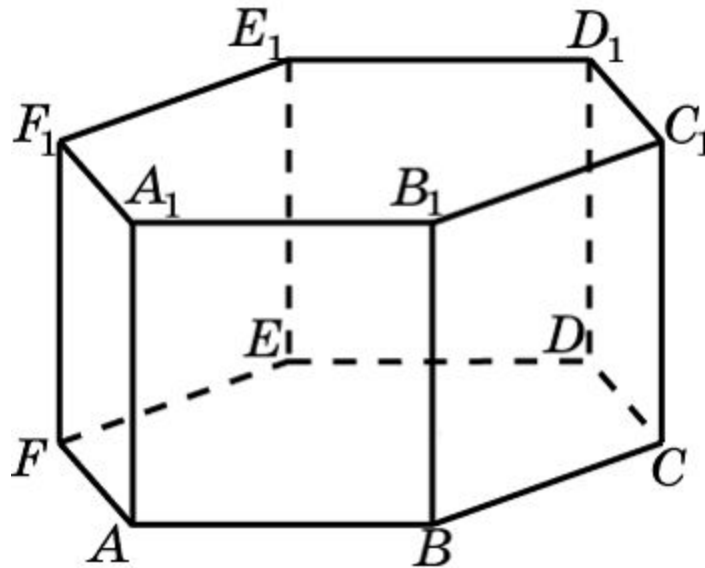
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ прямая AA_1 параллельна плоскости CEE_1 .



Доказательство: Прямая AA_1 параллельна прямой CC_1 , лежащей в плоскости CEE_1 . Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости CEE_1 .

Упражнение 18

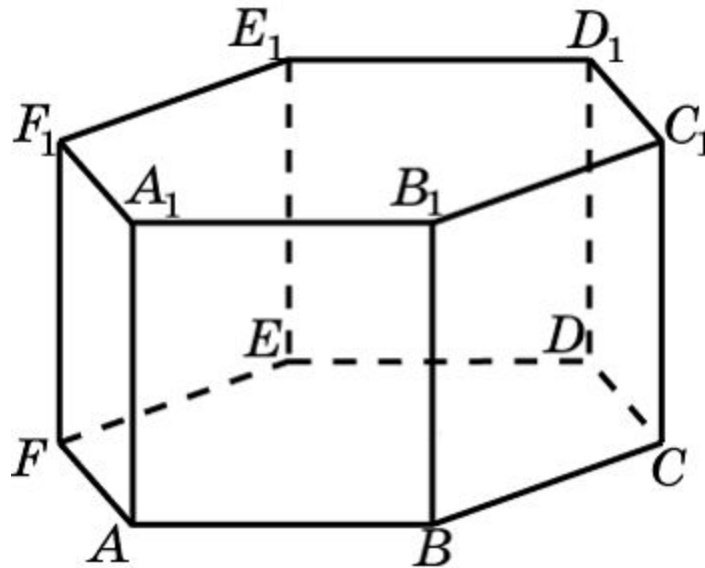
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ прямая AB_1 параллельна плоскости DEE_1 .



Доказательство: Прямая AB_1 параллельна прямой ED_1 , лежащей в плоскости DEE_1 . Следовательно, прямая AB_1 параллельна плоскости DEE_1 .

Упражнение 19

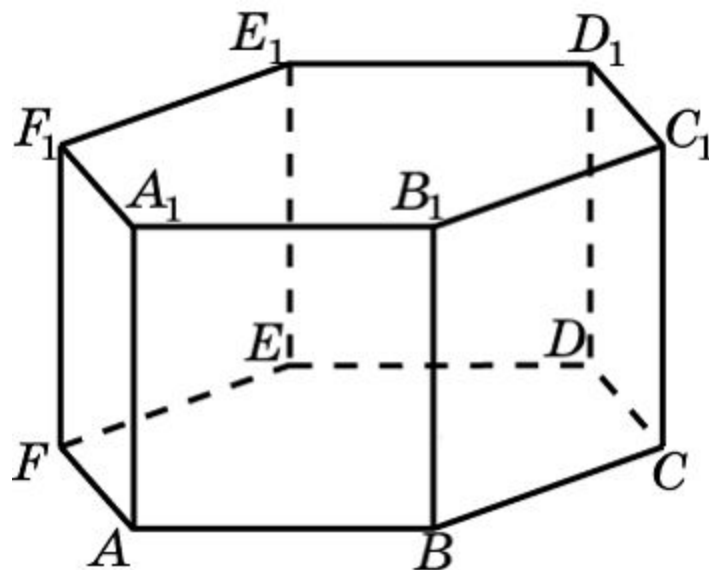
Докажите, что для правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ прямая AC_1 параллельна плоскости DFF_1 .



Доказательство: Прямая AC_1 параллельна прямой FD_1 , лежащей в плоскости DFF_1 . Следовательно, прямая AC_1 параллельна плоскости DFF_1 .

Упражнение 20

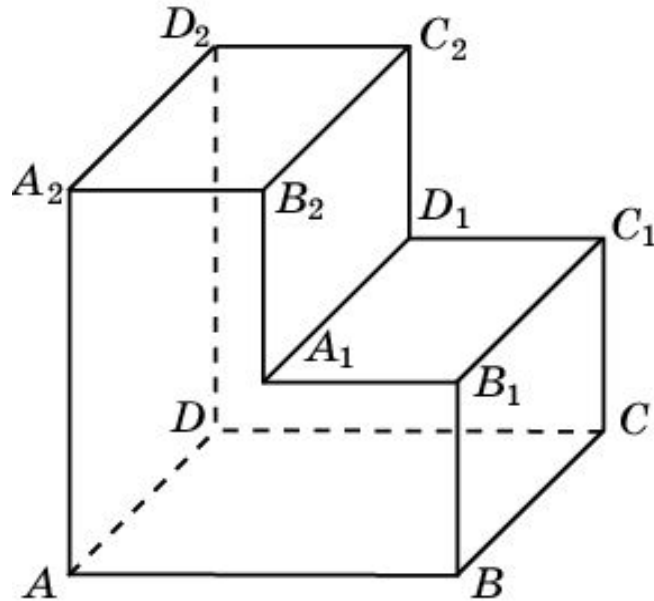
Сколько плоскостей проходит через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельных прямой: а) AA_1 ; б) AB ?



Ответ: а) 10; б) 6.

Упражнение 21

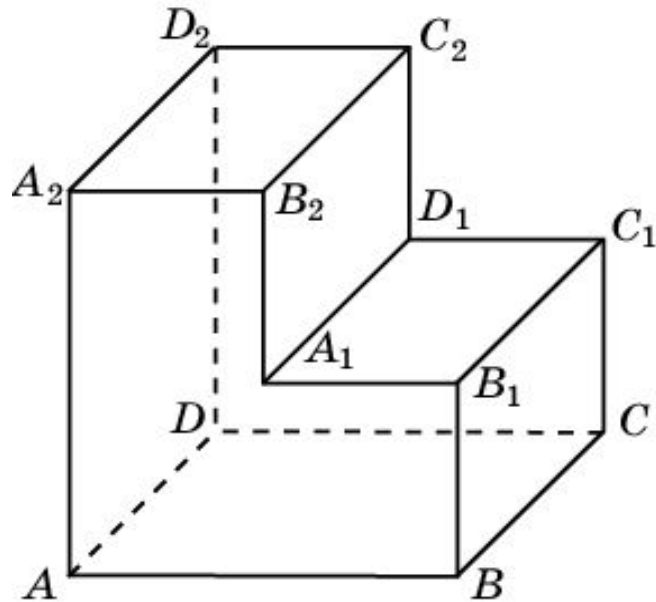
Назовите прямые, содержащие многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные плоскости ABC .



Ответ. $B_1C_1, A_1D_1, B_2C_2, A_2D_2, A_1B_1; C_1D_1; A_2B_2; C_2D_2$.

Упражнение 22

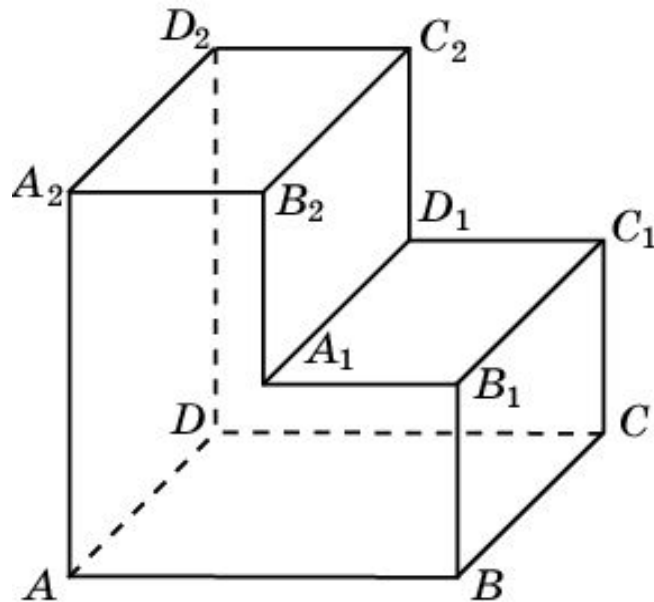
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что прямая AB параллельна плоскости $A_1B_1C_1$.



Доказательство: Прямая AB параллельна прямой A_1B_1 , лежащей в плоскости $A_1B_1C_1$. Следовательно, прямая A_1B_1 параллельна плоскости $A_1B_1C_1$.

Упражнение 23

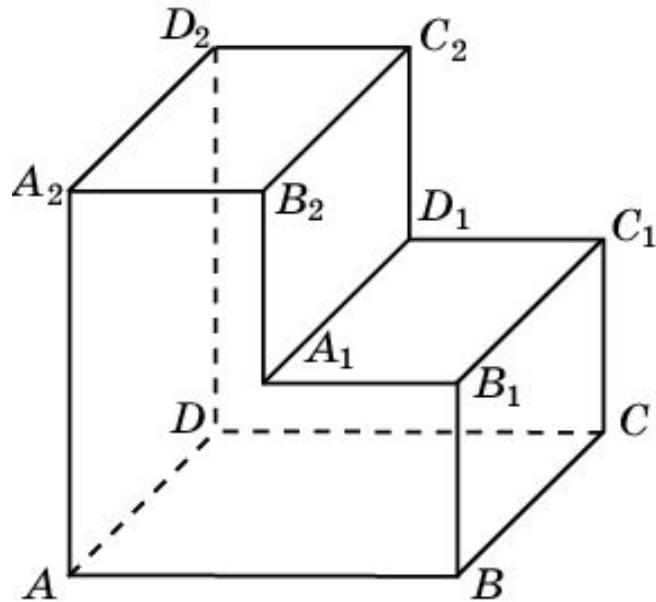
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что прямая AB параллельна плоскости CDD_2 .



Доказательство: Прямая AB параллельна прямой CD , лежащей в плоскости CDD_2 . Следовательно, прямая AB параллельна плоскости CDD_2 .

Упражнение 24

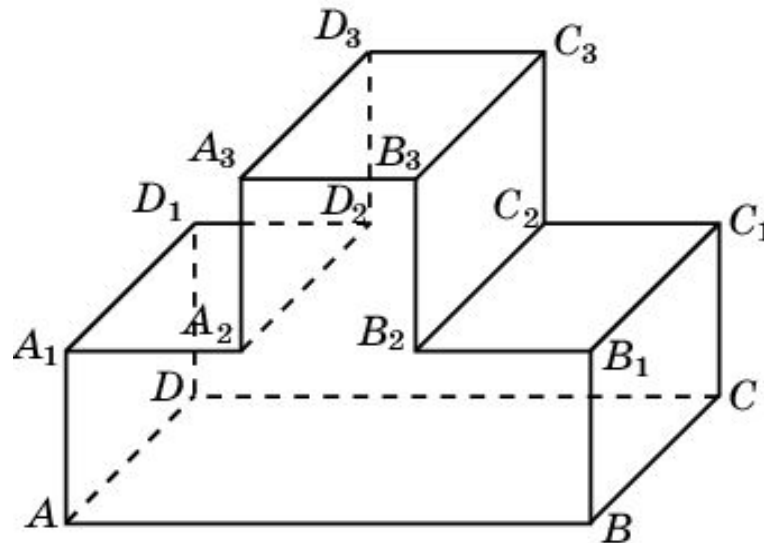
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что прямая AA_2 параллельна плоскости BCC_1 .



Доказательство: Прямая AA_2 параллельна прямой BB_1 , лежащей в плоскости BCC_1 . Следовательно, прямая AA_2 параллельна плоскости BCC_1 .

Упражнение 25

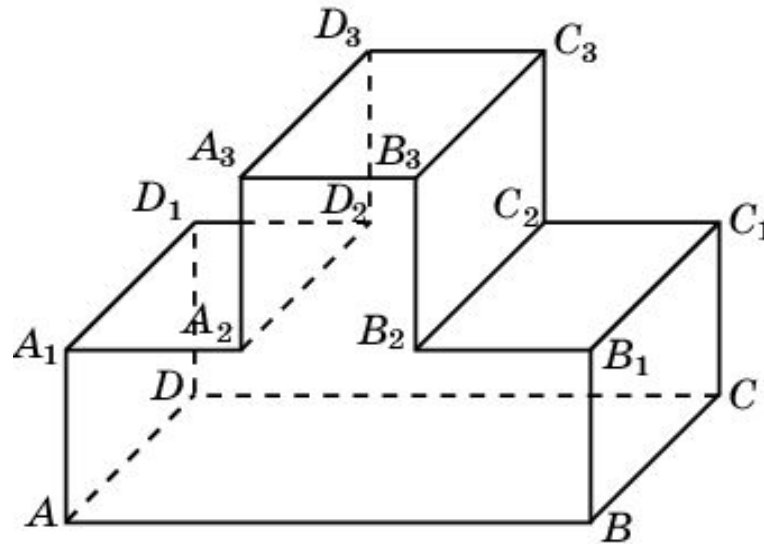
Назовите прямые, содержащие ребра многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, параллельные плоскости ADD_1 .



Ответ. $BC, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, A_3D_3, A_2D_2, C_3D_3; BB_1;$
 $CC_1; B_2B_3; C_2C_3; A_2A_3; D_2D_3.$

Упражнение 26

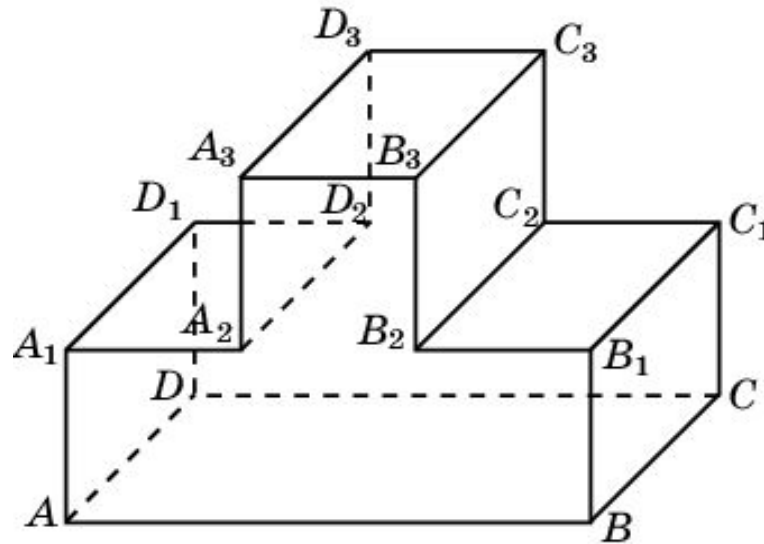
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что прямая AB параллельна плоскости $A_3B_3C_3$.



Доказательство: Прямая AB параллельна прямой A_3B_3 , лежащей в плоскости $A_3B_3C_3$. Следовательно, прямая AB параллельна плоскости $A_3B_3C_3$.

Упражнение 27

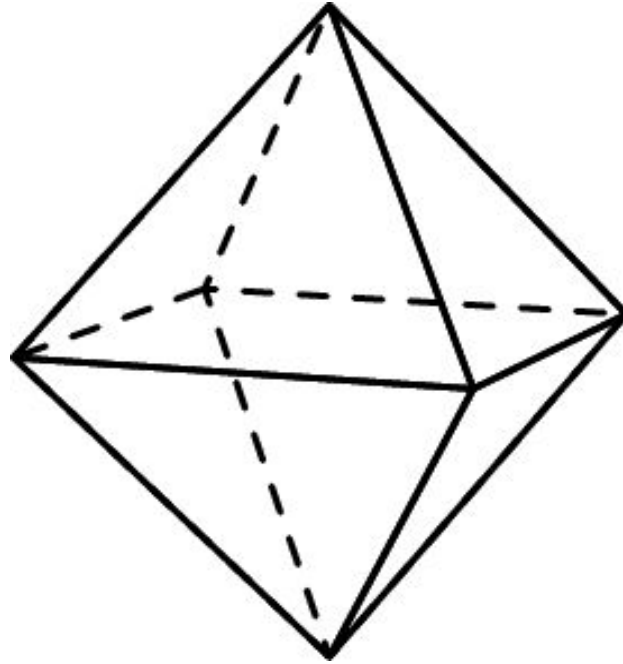
Для многогранника, изображенного на рисунке, все плоские углы которого прямые, докажите, что прямая AA_1 параллельна плоскости $B_2C_2C_3$.



Доказательство: Прямая AA_1 параллельна прямой B_2B_3 , лежащей в плоскости $B_2C_2C_3$. Следовательно, прямая AA_1 параллельна плоскости $B_2C_2C_3$.

Упражнение 28*

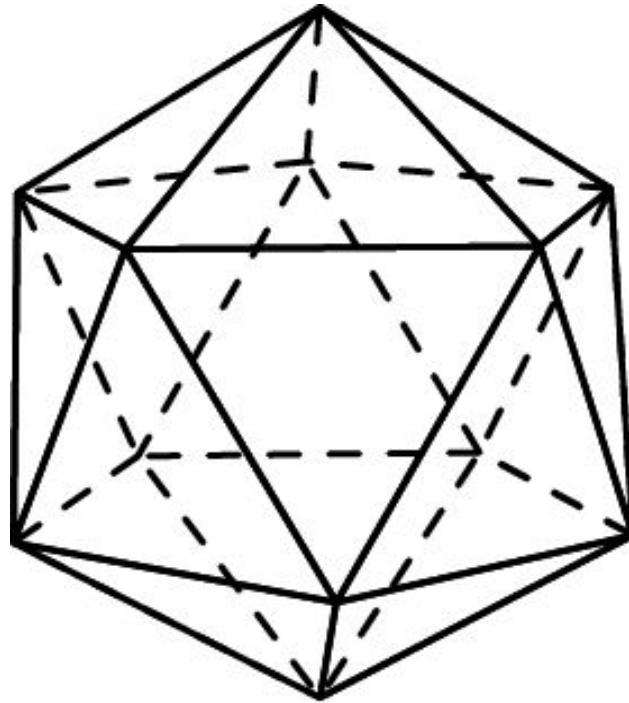
Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра октаэдра?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У октаэдра 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 24.

Упражнение 29*

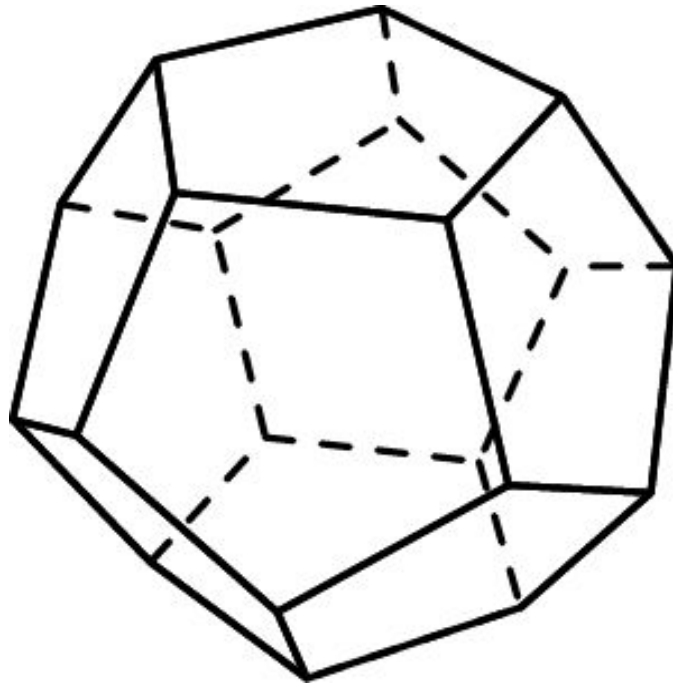
Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра икосаэдра?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У икосаэдра 30 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 60.

Упражнение 30*

Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра додекаэдра?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У додекаэдра 30 ребер.

Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 60.