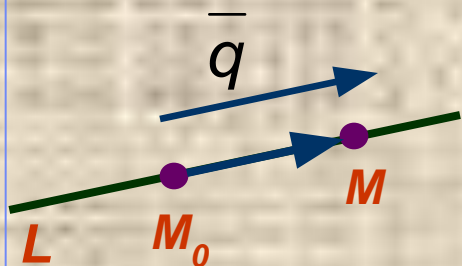


Прямая в пространстве

- Каноническое уравнение прямой
- Параметрическое уравнение прямой
- Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей
- Угол между двумя прямыми
- Угол между прямой и плоскостью
- Условие принадлежности двух прямых одной плоскости
- Точка пересечения прямой и плоскости

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая L проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\vec{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\vec{q} = \{m; n; p\}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

По условию коллинеарности двух векторов:

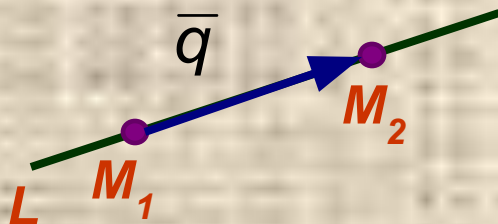
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Каноническое уравнение
прямой

$\vec{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\bar{q} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение прямой, проходящей
через две заданные точки

Параметрическое уравнение прямой

При решении многих практических задач используют параметрическое уравнение прямой, которое получается из канонического уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = t \\ \frac{y - y_0}{n} = t \\ \frac{z - z_0}{p} = t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Параметрическое уравнение
прямой

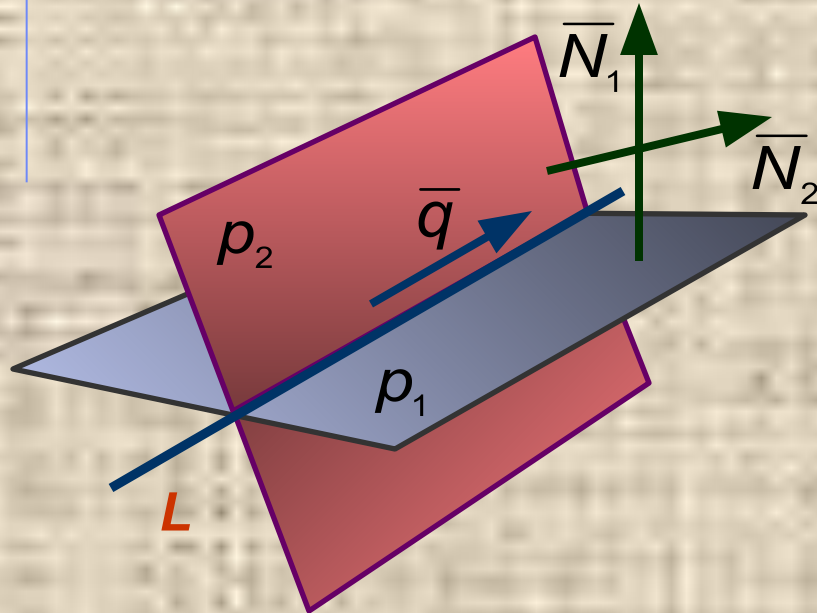
Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей

Пусть две непараллельные плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Эти плоскости определяют единственную прямую в пространстве:



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Уравнение прямой, как линии пересечения двух плоскостей

$$\left. \begin{array}{l} \bar{q} \perp \bar{N}_1 \\ \bar{q} \perp \bar{N}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{q} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$$

Пример

Написать каноническое уравнение прямой:
$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Найдем точку, принадлежащую прямой, то есть удовлетворяющую системе уравнений.

Пологая z равным любому числу, например, $z = 0$, получим:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow \text{Точка } M_0(11; -8; 0) - \text{принадлежит прямой}$$

Найдем координаты направляющего вектора прямой:

$$\bar{q} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$$

$$\frac{x - 11}{4} = \frac{y + 8}{-3} = \frac{z}{-1}$$

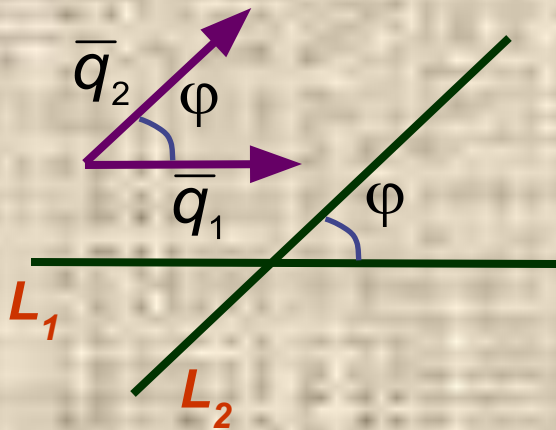
Угол между прямыми

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Углом между этими прямыми называется угол между направляющими векторами к этим прямым.

$$\bar{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\} \quad \bar{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$



$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2|}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \\ &= \frac{|m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \end{aligned}$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$$

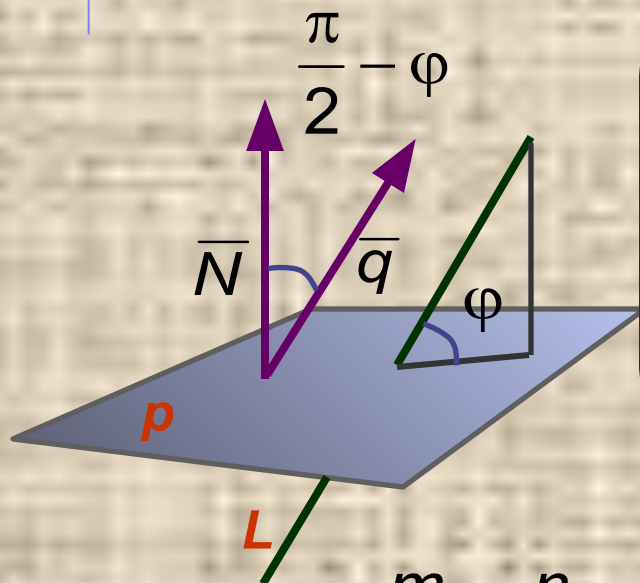
Угол между прямой и плоскостью

Пусть прямая L задана каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Плоскость p задана общим уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.



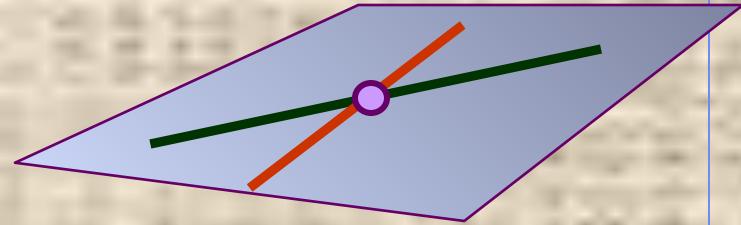
$$\begin{aligned} \cos(\bar{q}, \bar{N}) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{|\bar{q} \cdot \bar{N}|}{|\bar{q}| \cdot |\bar{N}|} = \\ &= \frac{|m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

$$L \perp p \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

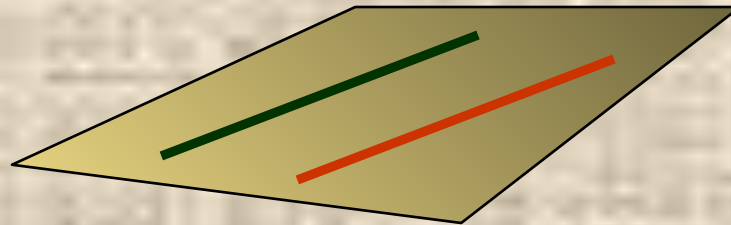
$$L \parallel p \Leftrightarrow m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C = 0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

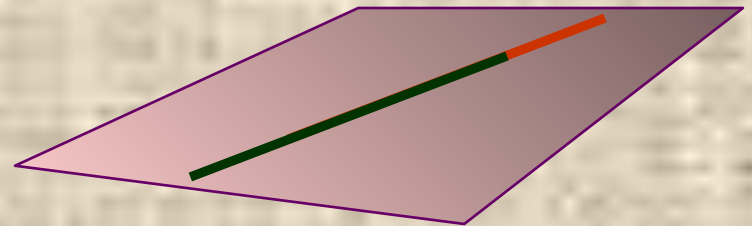
Две прямые в пространстве могут пересекаться,



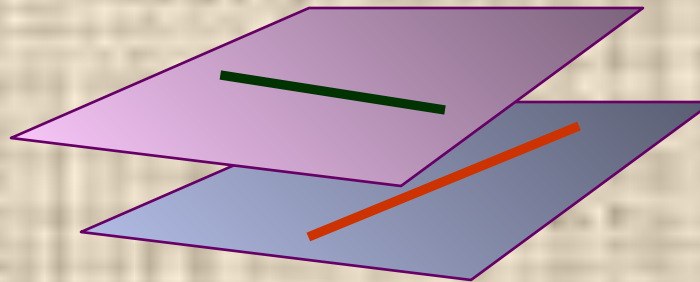
быть параллельными,



совпадать,



и скрещиваться.



В первых трех случаях прямые лежат в одной плоскости.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

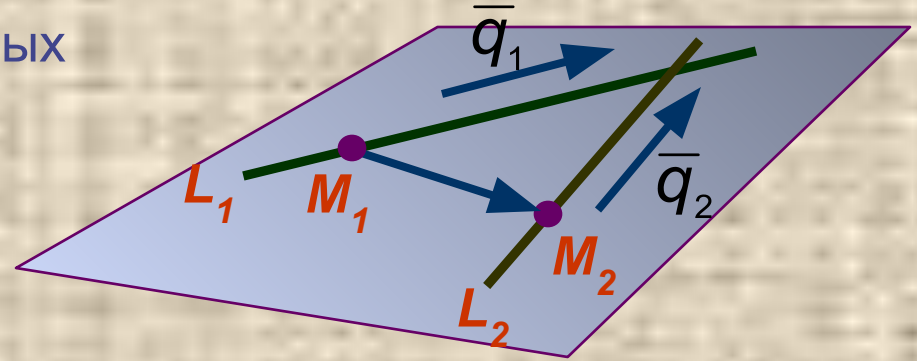
Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:

$$\bar{q}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$$

$$\bar{q}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$$

$$\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

были компланарны.



$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Условие
принадлежности
двух прямых одной
плоскости

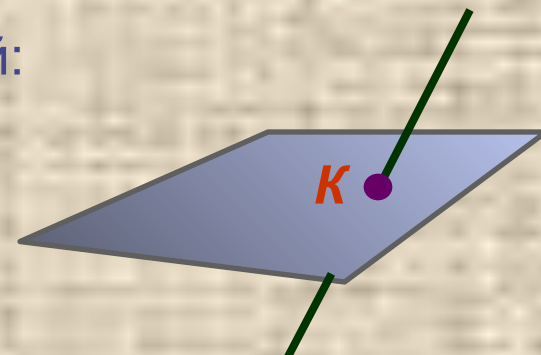
Точка пересечения прямой и плоскости

При вычислении координат точки пересечения прямой и плоскости

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad p: Ax + By + Cz + D = 0$$

следует совместно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases}$$



При этом необходимо:

- Записать уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Точка пересечения прямой и плоскости

- Подставить в уравнение плоскости вместо x ; y ; z :

$$A(mt + x_0) + B(nt + y_0) + C(pt + z_0) + D = 0$$

- Решить полученное уравнение относительно t :

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$$

- Подставить t_0 в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x_K = mt_0 + x_0 \\ y_K = nt_0 + y_0 \\ z_K = pt_0 + z_0 \end{cases} \Rightarrow K(x_K; y_K; z_K)$$

Пример

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{1} \quad y + 5z + 6 = 0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 5t \\ z = t + 2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t + 5(t + 2) + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10t + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1.6) + 1 \\ y = 5 \cdot (-1.6) \\ z = -1.6 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3.8 \\ y = -8 \\ z = 0.4 \end{cases} \Rightarrow K(-3.8; -8; 0.4)$$