



Основы теории вероятностей

Виды событий

- **Достоверное**

Событие, которое обязательно произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий.

- **Невозможное**

Событие, которое заведомо не произойдёт, если будет осуществлена определённая совокупность условий.

- **Случайное**

Событие, которое при осуществлении определённой совокупности условий может либо произойти, либо не произойти.

Предмет теории вероятностей

- Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Виды случайных событий

- Несовместные
- Образующие полную группу
- Равновозможные

Случайное событие

- **Событие** – это результат испытания.
- **Элементарный исход** – каждый из возможных результатов испытания.
- **Благоприятствующий исход** – тот исход, в котором интересующее нас событие произошло.

Классическое определение вероятности

- **Вероятностью события A** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключённое между нулём и единицей.

Вывод

- Вероятность **любого** события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Пример I

- Из колоды в 36 карт вытащили одну карту. Какова вероятность, что это будет бубновая масть?

Решение:

A – из колоды вытащили бубновую карту

$n = 36$ (всего 36 карт в колоде)

$m = 9$ (9 карт бубновой масти)

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Пример 2

- Абонент забыл две последних цифры в номере телефона и, помня лишь, что они различны, набрал их наугад. Какова вероятность, что набран правильный номер?

Решение:

A – набран правильный номер

$n = 90$ (существует всего 90 комбинаций из двух разных цифр)

$m = 1$ (только в одном случае номер будет верным)

$$P(A) = \frac{1}{90} = 0,011$$

Комбинаторика

- Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчинённых определённым условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества.

Перестановки



Перестановки

Комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

$$P_n = n!$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \qquad 0! = 1$$

Пример

- Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если все цифры в числе разные?

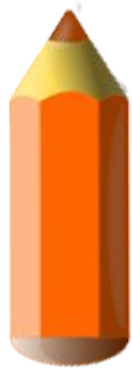
Решение:

$n = 5$ (имеется 5 разных цифр)

Количество возможных перестановок:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Размещения



Размещения

Комбинации, составленные из n различных элементов по m элементам, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Пример

- Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если все цифры в числе разные?

Решение:

$n = 6$ (имеется 6 разных цифр)

$m = 2$ (выбираем по 2 цифры)

Количество возможных размещений 6 цифр по двум местам:

$$A_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \frac{30}{2} = 15$$



Сочетания

Комбинации, составленные из n различных элементов по m элементам, которые отличаются хотя бы одним элементом (порядок элементов не важен).

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}$$

Свойства сочетания

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Пример

- На витрине магазине 10 видов пирожных. Сколькими способами можно выбрать 4 разных пирожных?

Решение:

$n = 10$ (имеется 10 разных пирожных)

$m = 4$ (выбираем по 4 пирожных)

Количество возможных комбинаций из 10 пирожных по 4:

$$\begin{aligned} C_{10}^4 &= \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \\ &= \frac{7 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{9}^3 \cdot 10}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 10}{1} = 210 \end{aligned}$$

Связь комбинаций

$$A_n^m = C_n^m \cdot P_m$$

Перестановки с повторениями

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д. (т.е. $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), то число перестановок с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Размещения с повторениями

Если n различных элементов могут повториться m раз, оказавшись соответственно на m местах, то число размещений с повторениями вычисляется по формуле

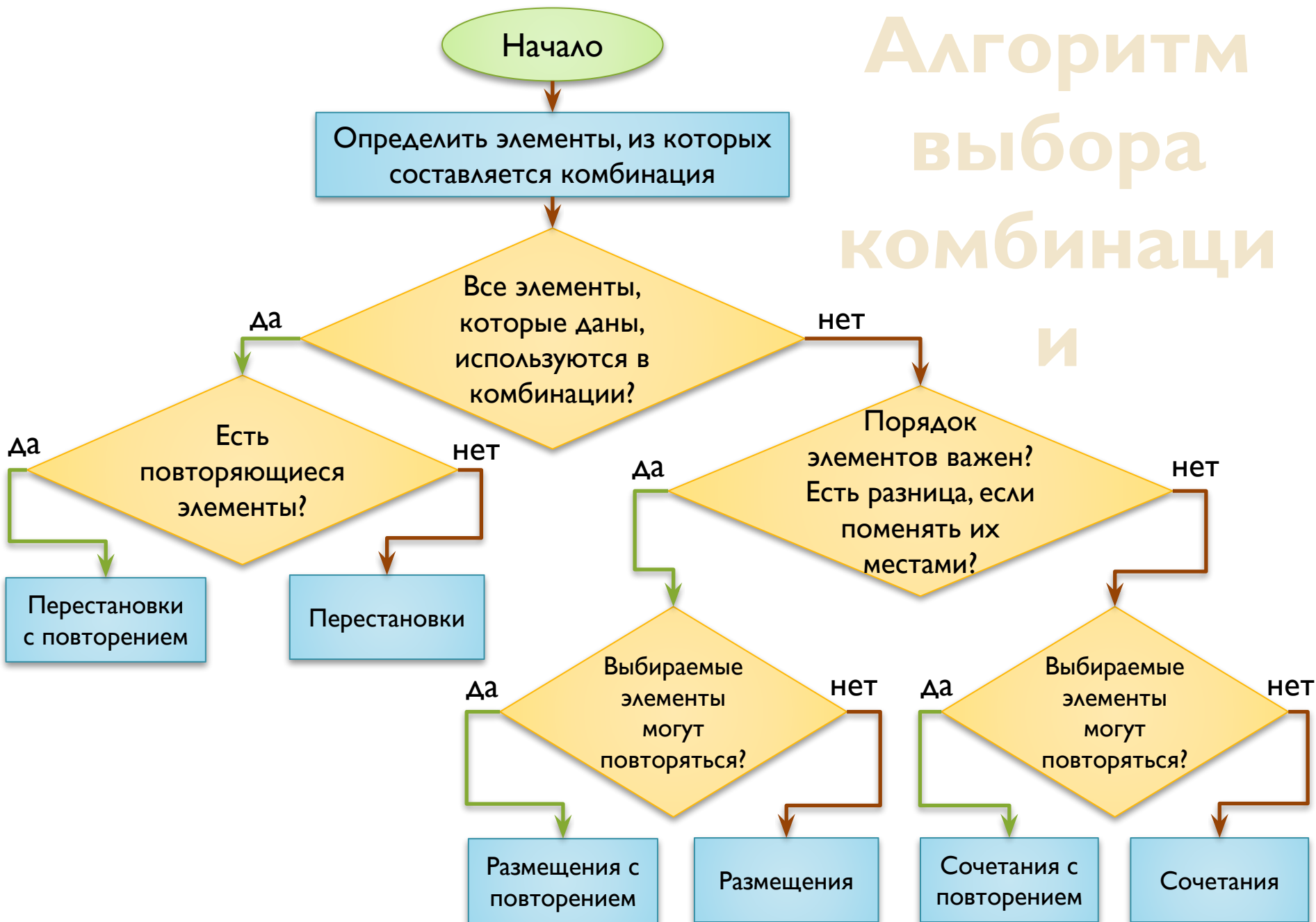
$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Сочетания с повторениями

Если n различных элементов могут повториться m раз (без учёта порядка), то число сочетаний с повторениями вычисляется по формуле

$$\overline{C_n^m} = \frac{(n + m - 1)!}{m! \cdot (n - 1)!} = C_{n+m-1}^m$$

Алгоритм выбора комбинации и



Правило суммы

- Если некоторый объект **A** можно выбрать из совокупности объектов **k** способами, а другой объект **B** можно выбрать **m** способами, то выбрать или **A**, или **B** можно **$k + m$** способами.

Правило произведения

- Если некоторый объект **A** можно выбрать из совокупности объектов **k** способами, и после каждого такого выбора другой объект **B** можно выбрать **m** способами, то выбрать пару объектов **A** и **B** можно **$k \cdot m$** способами.

