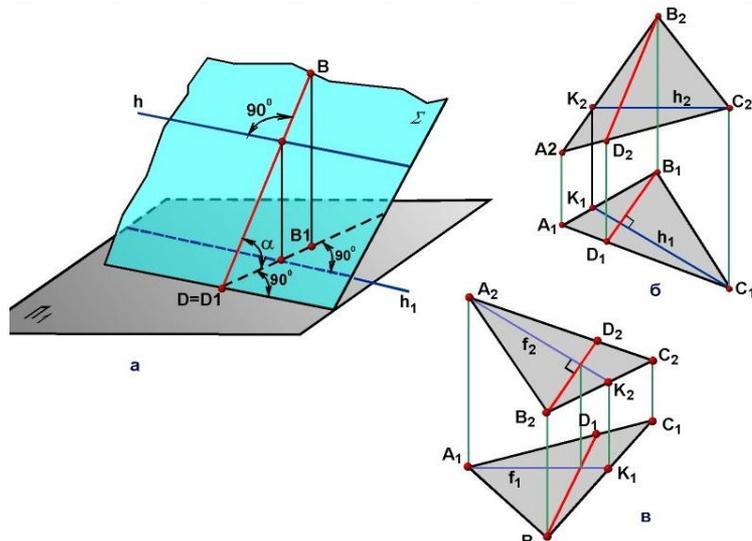


## Раздел: Начертательная геометрия



### Тема 3. Ортогональные проекции плоскости. Относительное положение плоскостей

# Цель и задачи занятия

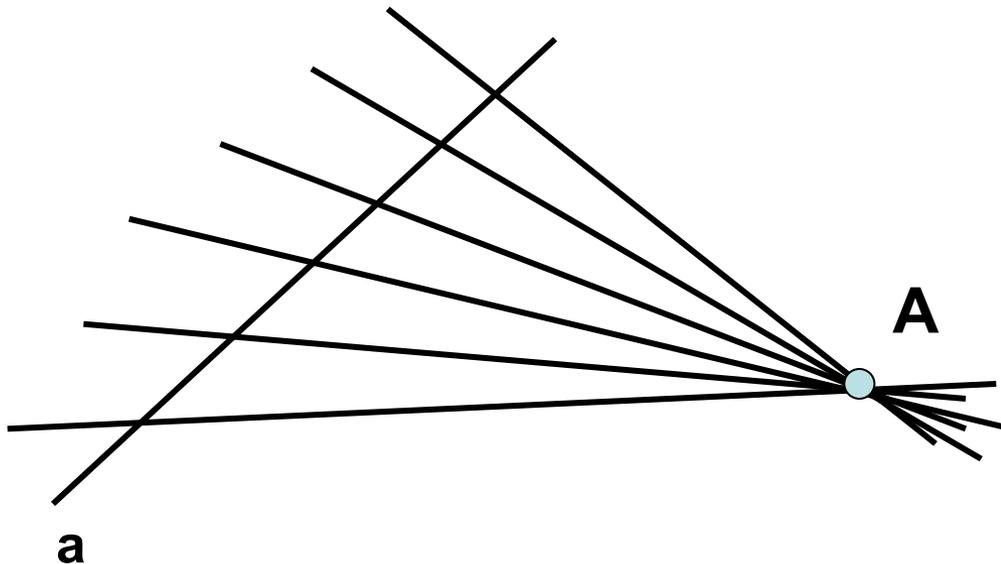
- Определить графические способы задания плоскости на эюре
- Рассмотреть особенности плоскостей общего и частного положений в пространстве и на ортогональном чертеже

В результате изучения темы **Вы будете знать:**

- Способы задания плоскости
- Понятие «Следы плоскости»
- Классификацию плоскостей общего и частного положений
- Особые линии плоскости
- Относительное положение прямой и плоскости
- Относительное положение плоскостей

# Ортогональные проекции плоскости

**ПЛОСКОСТЬ** – множество положений прямой линии, проходящей через одну точку пространства и пересекающих вне ее прямую линию



# СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

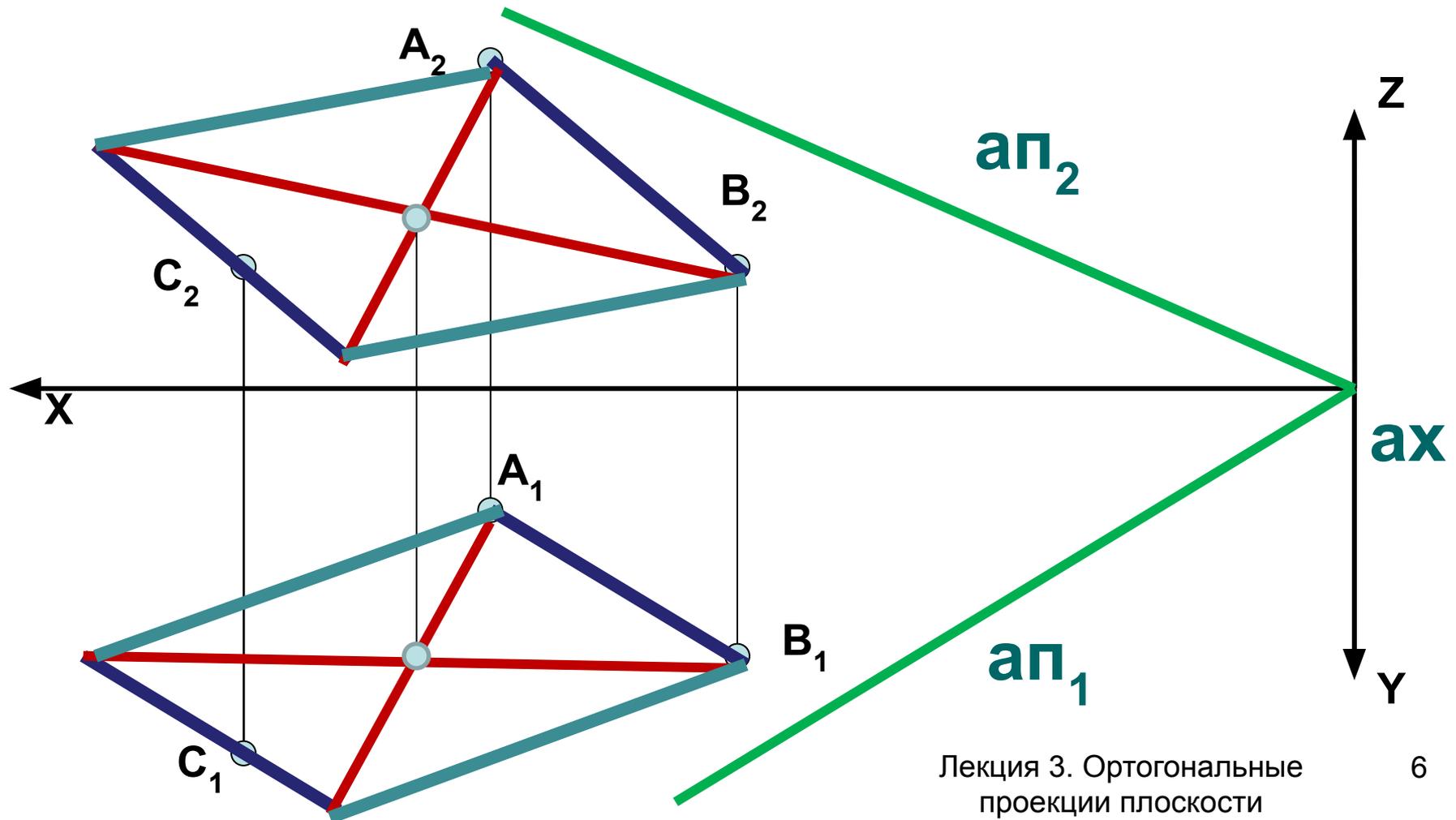
## 1. Аналитический способ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

## 2. Графические способы

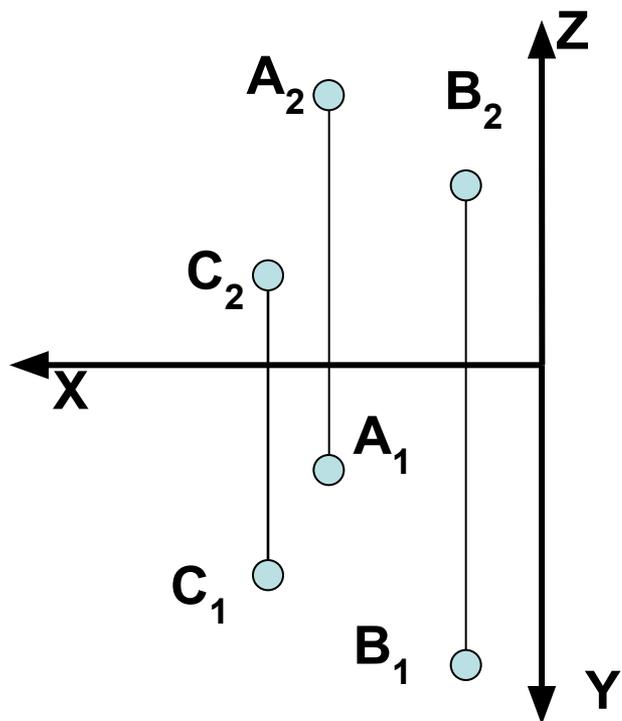
# Графические способы задания плоскости

Существуют 6 способов задания плоскости на эюре, каждый из которых последовательно переходит один в другой

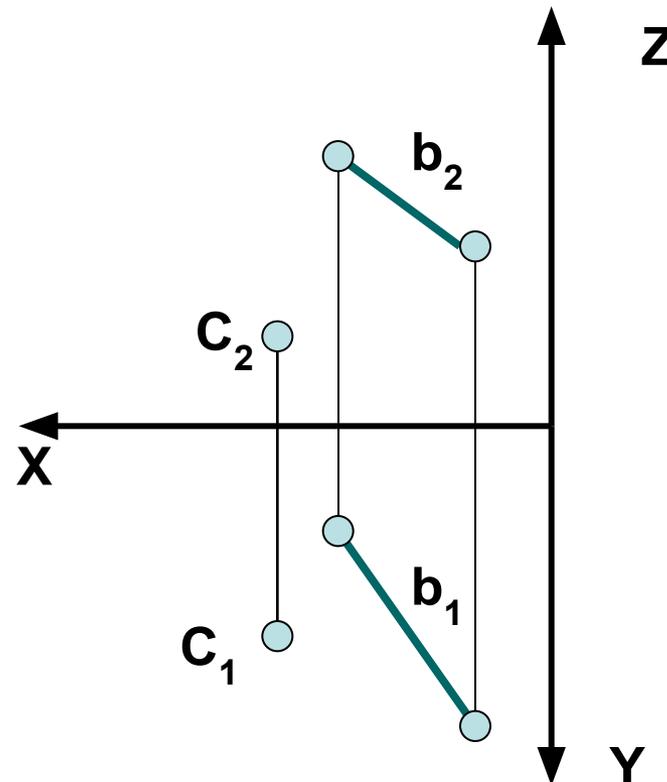


# Графические способы задания плоскости

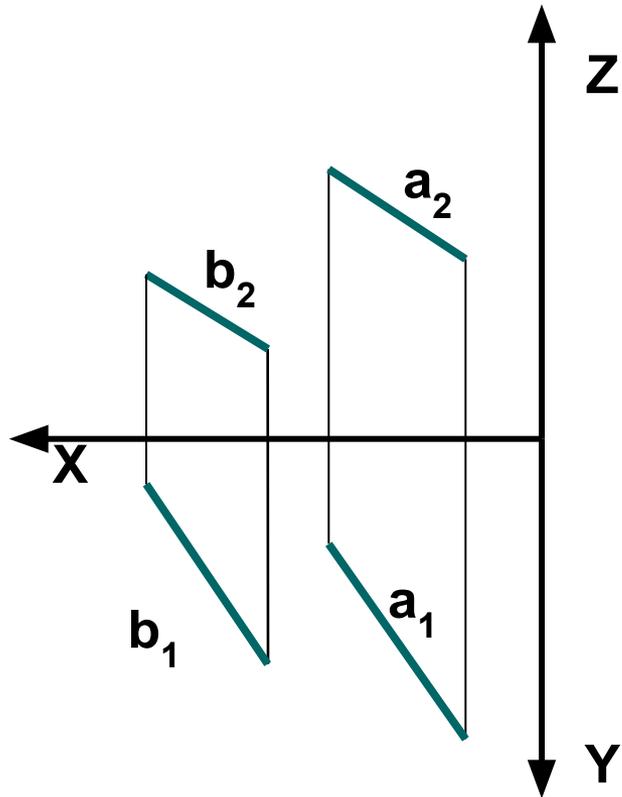
1. Три точки не принадлежащие одной прямой



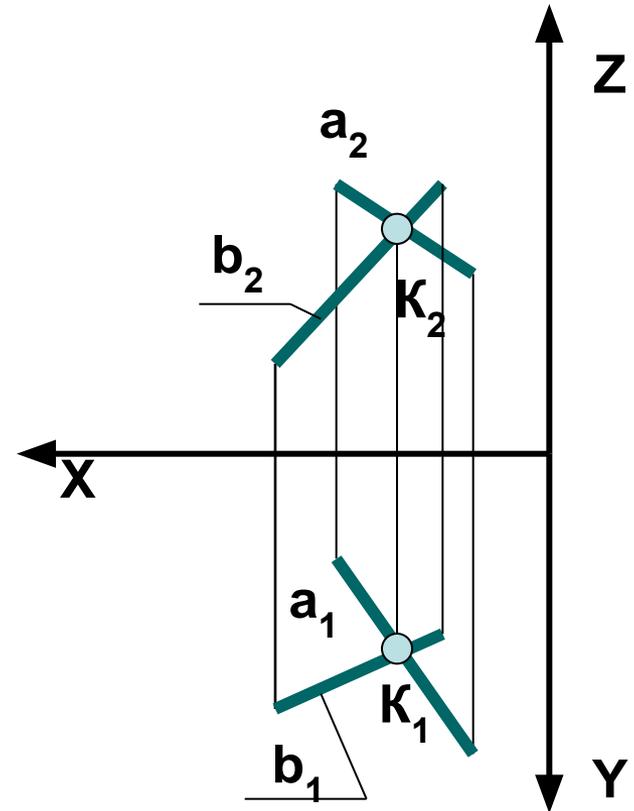
2. Прямая и точка вне этой прямой



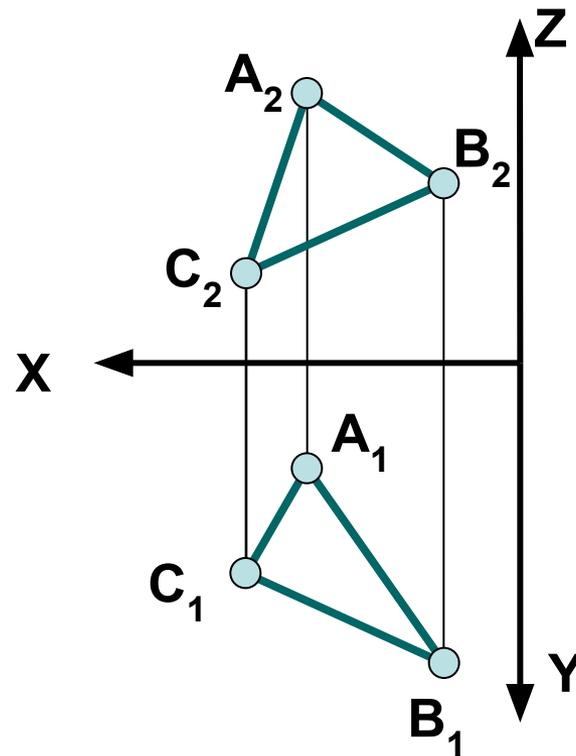
### 3. Параллельные прямые



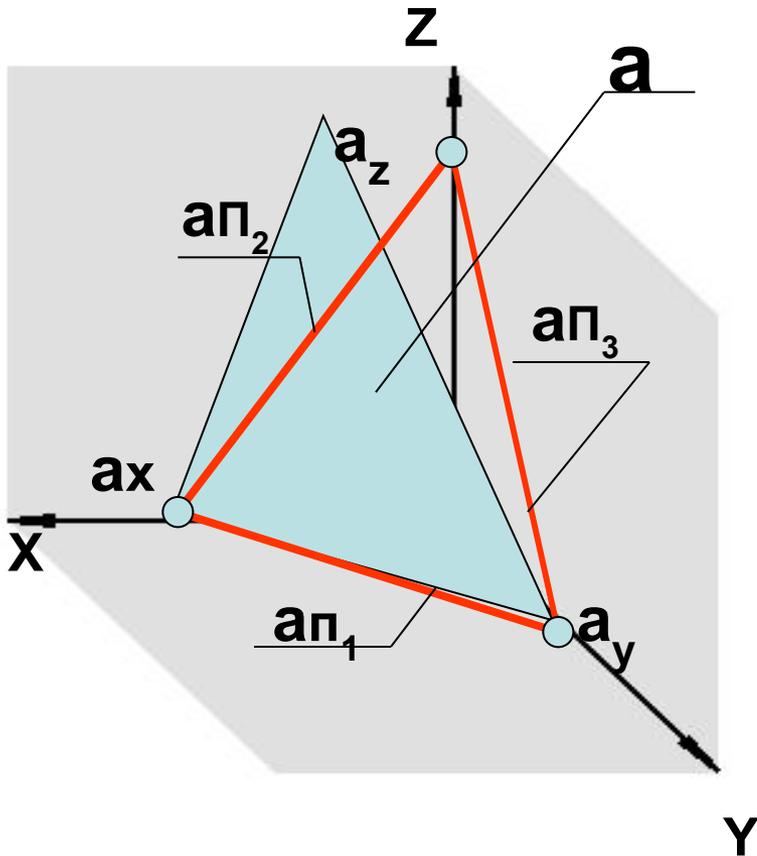
### 4. Пересекающиеся прямые



## 5. Плоская фигура



## 6. Следы плоскости – линии пересечения данной плоскости с плоскостями проекций



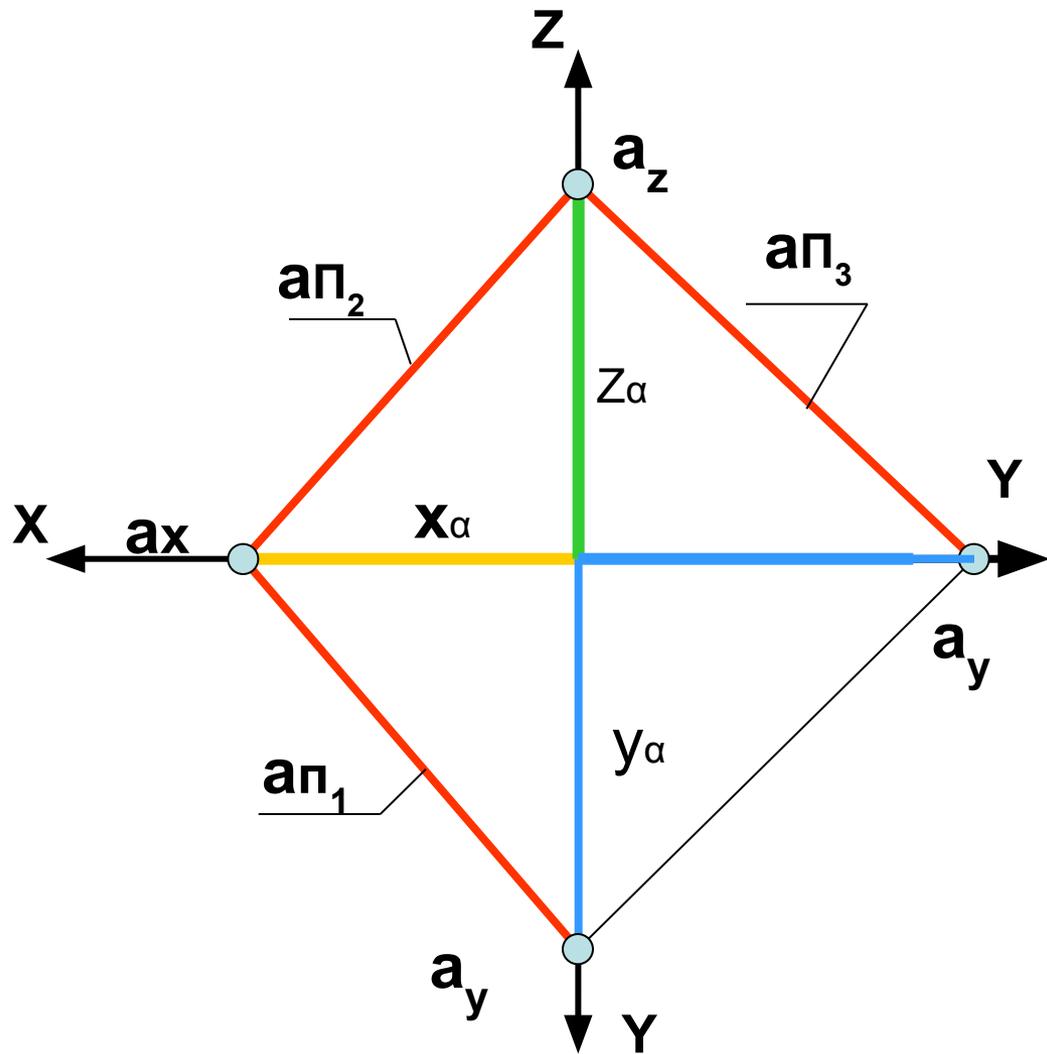
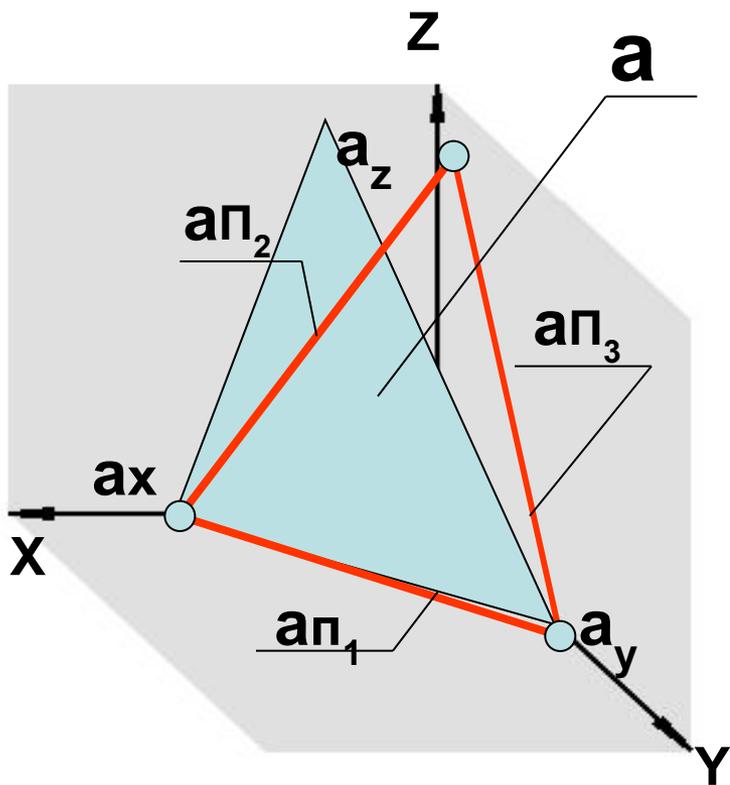
**а**-плоскость;

**ап<sub>1</sub>** - горизонтальный след  
плоскости **а**;

**ап<sub>2</sub>** - фронтальный след  
плоскости **а**;

**ап<sub>3</sub>** - профильный след  
плоскости **а**;

**ах, ау, аз** - точки схода следов



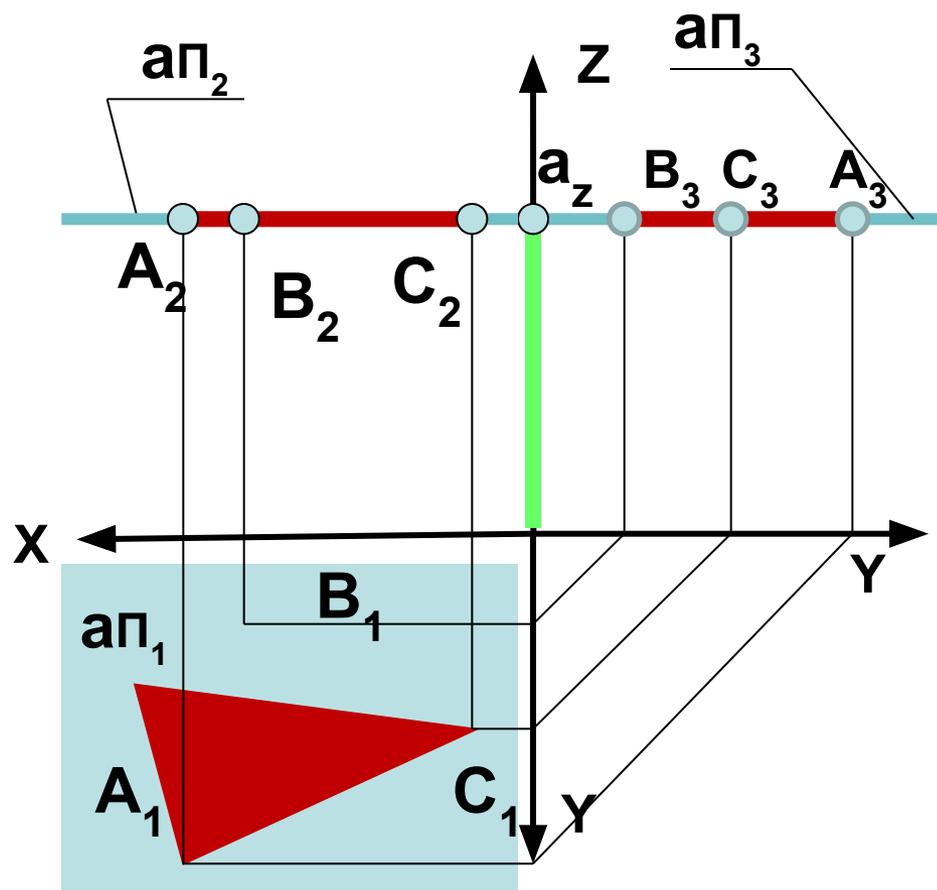
# ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ

1. Относительно плоскостей проекций плоскости в пространстве занимают:
  - общее положение
  - частное положение
2. Плоскости частного положения подразделяют на
  - плоскости параллельные плоскостям проекций – **плоскости уровня**
  - плоскости перпендикулярные плоскостям проекций – **плоскости проецирующие**

# ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

## 1. Плоскости уровня – параллельные плоскостям проекций

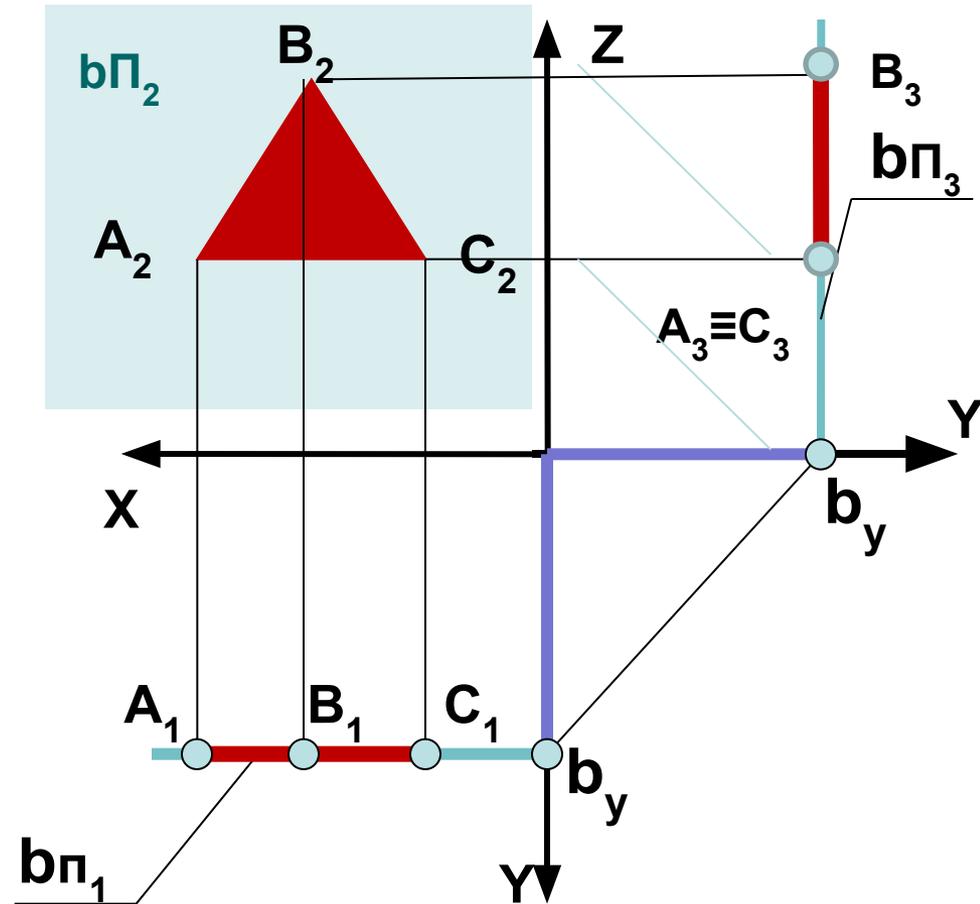
### Горизонтальная плоскость уровня $\Pi_1$



проекции плоскости

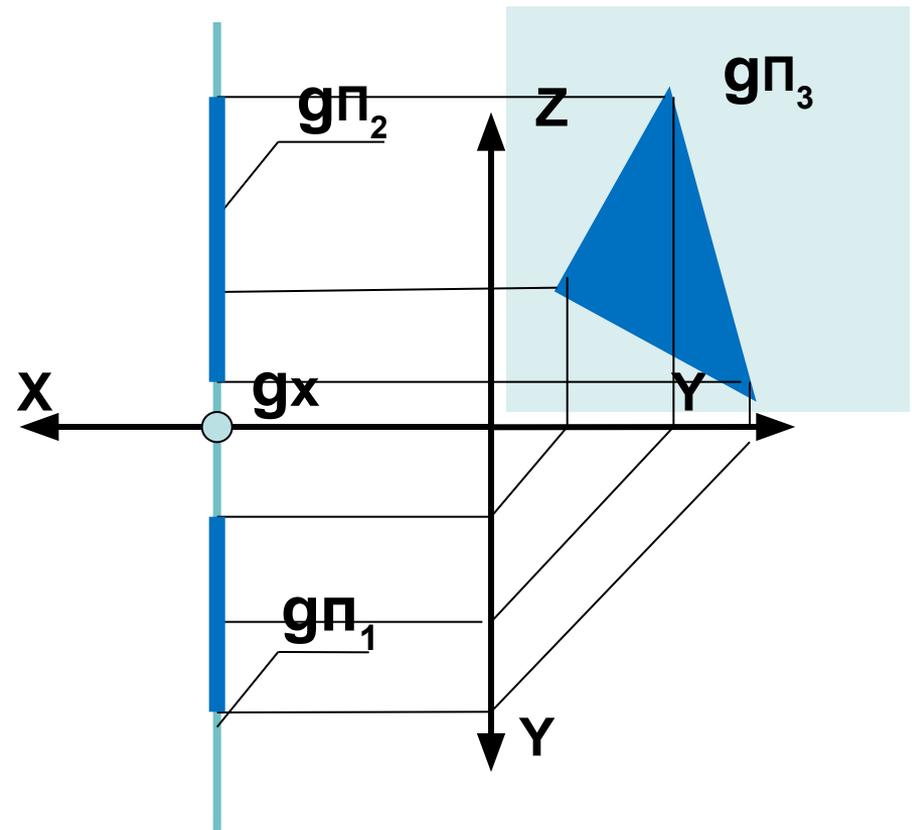
$$\triangle ABC \square \square; |ABC| = |A_1B_1C_1|$$

# Фронтальная плоскость уровня $b \parallel \Pi_2$



$$\triangle ABC \square \square; \quad |ABC| = |A_2B_2C_2|$$

# Профильная плоскость уровня $\square \square \square \Pi_3$

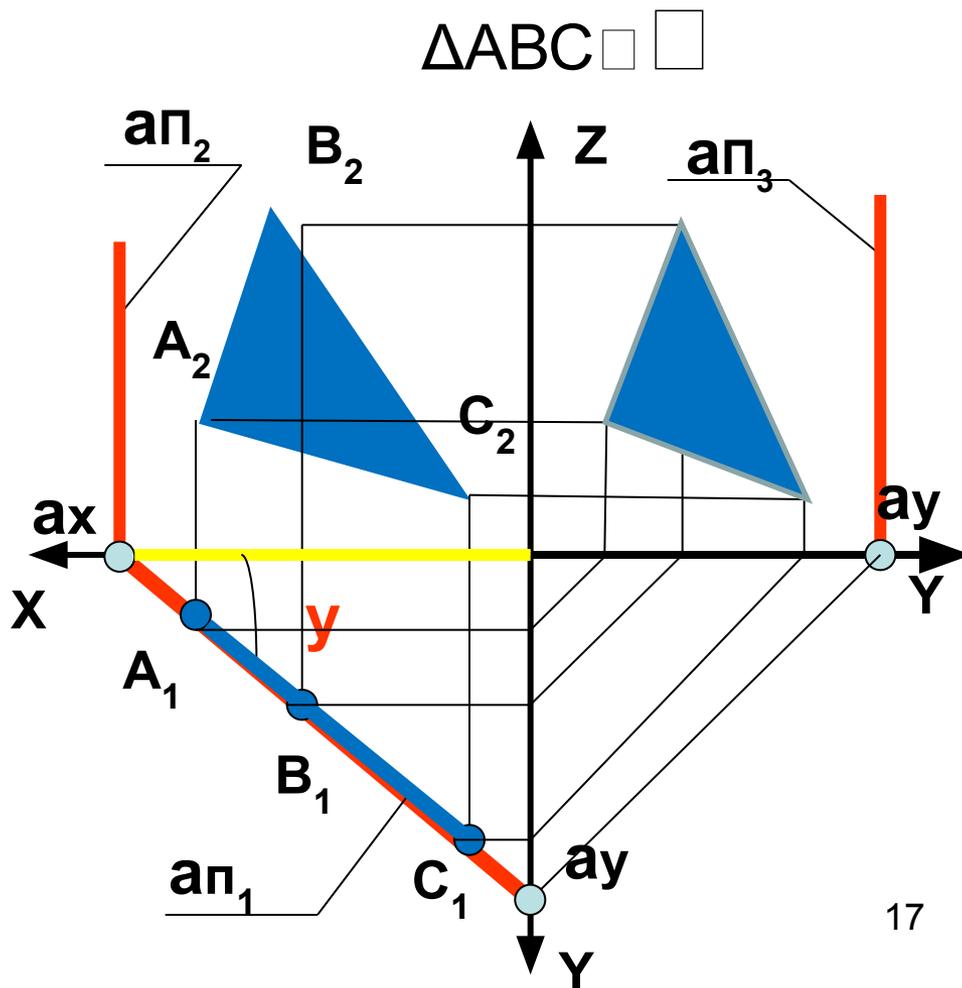


# Особенности чертежа плоскостей уровня

- Фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются **в натуральную величину** на параллельную плоскость проекций
- На другие плоскости проекций фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются **в прямую линию**

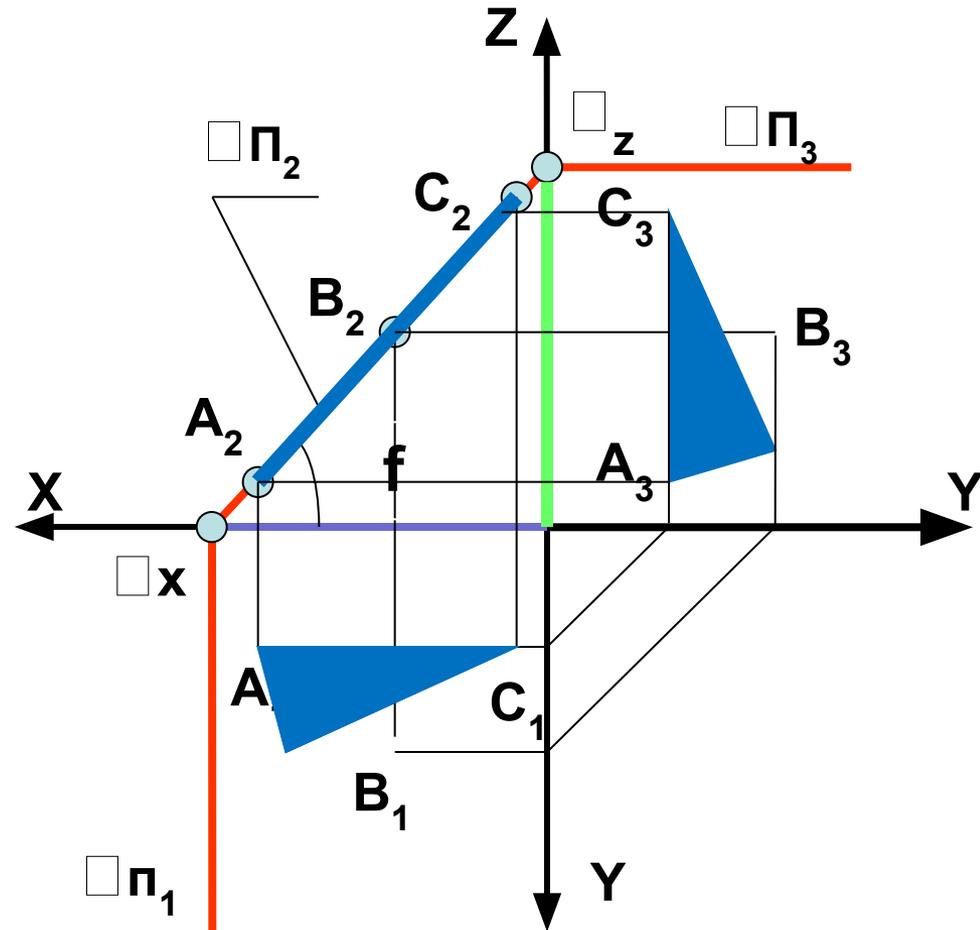
## 2. Проецирующие плоскости - перпендикулярные плоскостям проекций

Горизонтально проецирующая плоскость  $\square \perp \Pi_1$



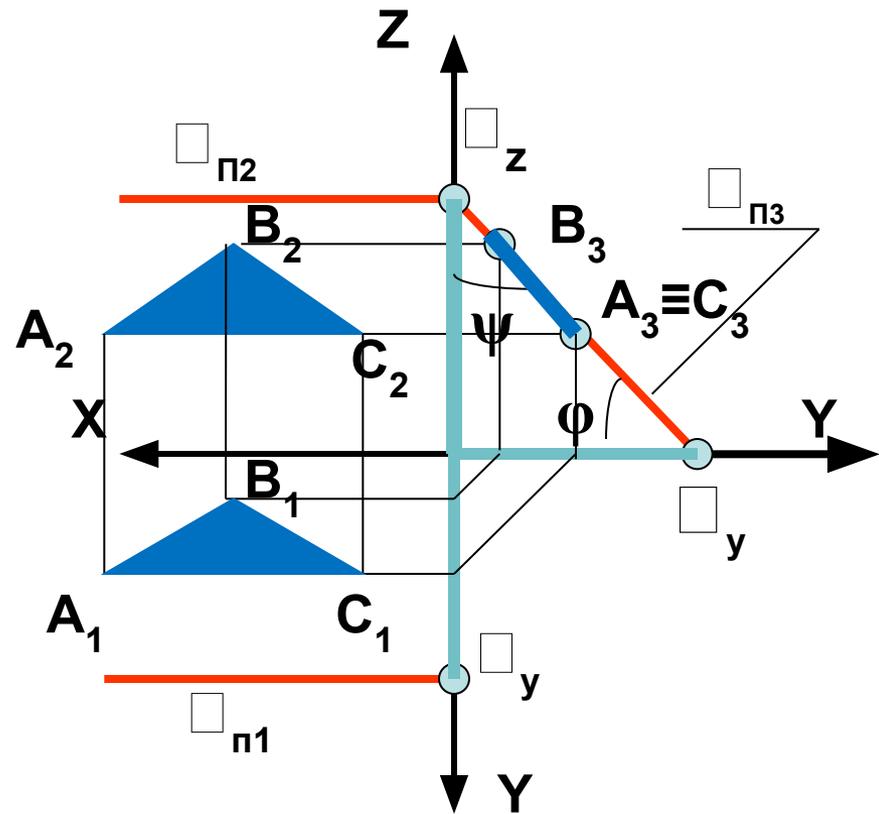
# Фронтально проецирующая плоскость $\square \perp \Pi_2$

$\triangle ABC$   $\square$   $\square$



# Профильно проецирующая плоскость $\perp \Pi_3$

$\triangle ABC$   $\square$   $\square$

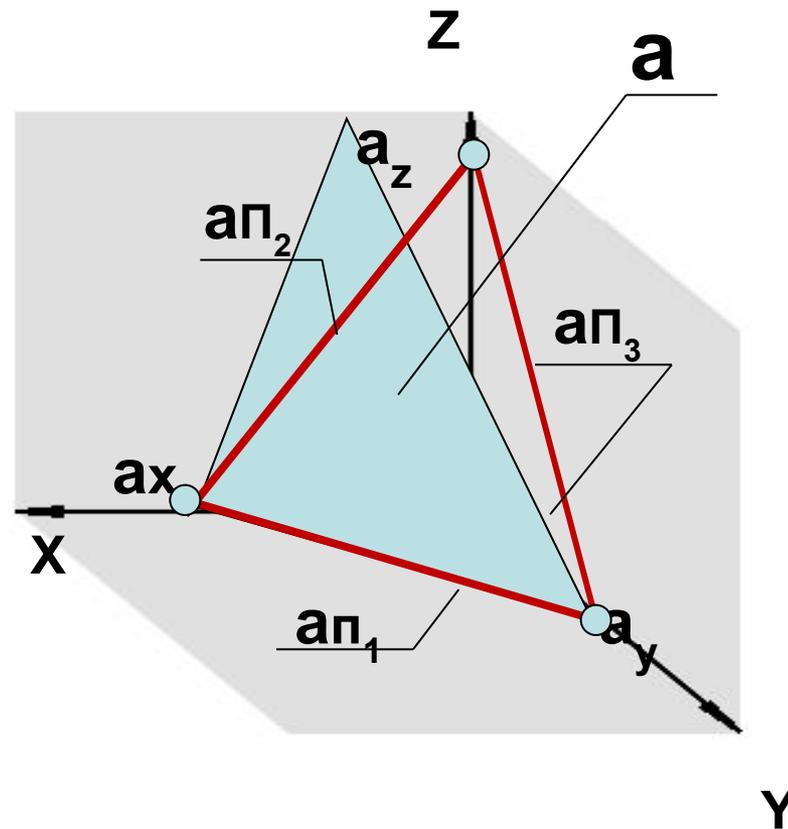


## Особенности чертежа проецирующих плоскостей

- Фигуры принадлежащие проецирующим плоскостям **проецируются в прямую линию** на перпендикулярную плоскость проекций (вырожденная проекция)
- **Угол между заданной плоскостью и плоскостью проекций** равен углу наклона между вырожденной проекцией и осями координат

# Ортогональные проекции плоскости общего положения

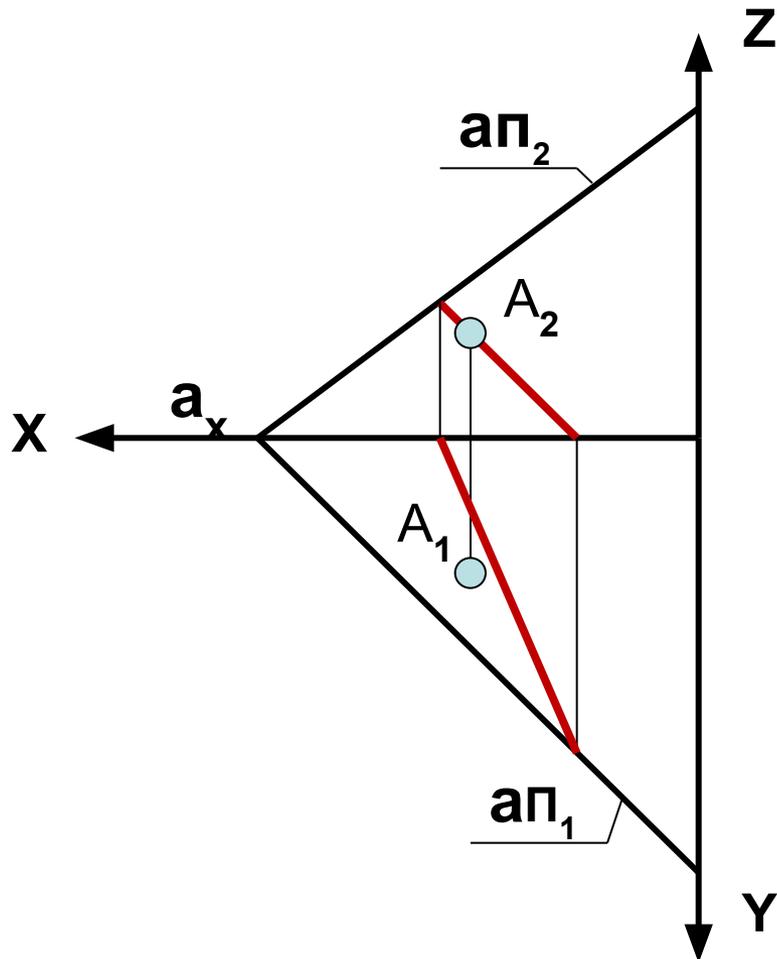
- Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций



# Принадлежность точки и прямой линии плоскости

1. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой в этой плоскости
2. Прямая принадлежит плоскости если она проходит:
  - а) через две точки этой плоскости;
  - б) через точку плоскости параллельно какой-либо прямой в этой плоскости

# Принадлежит ли точка $A$ плоскости $a$ ?



точка  $A$  плоскости  $a$   
не принадлежит, т.к.  
точка не принадлежит  
прямой, лежащей в  
этой плоскости

# ОСОБЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

1. **Линии уровня плоскости** – линии параллельные плоскостям проекций и принадлежащие данной плоскости;
2. **Линии наибольшего наклона плоскости (ЛНН)** – определяют угол наклона данной плоскости к одной из плоскостей проекций.

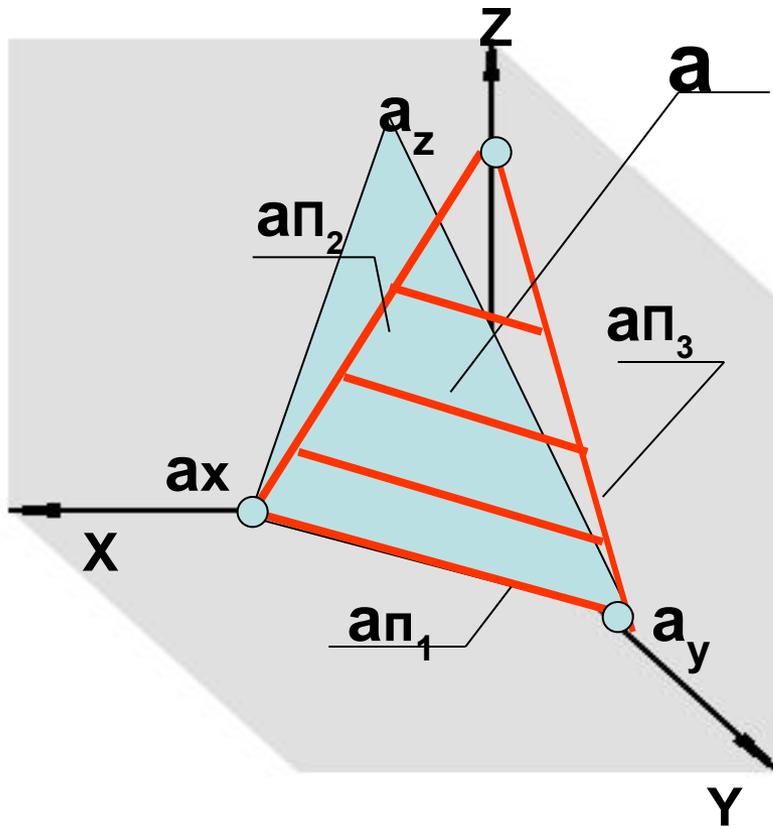
**ЛНН** перпендикулярны линиям уровня:

горизонтали на плоскости  $\Pi_1$ ;

фронталы на плоскости  $\Pi_2$ .

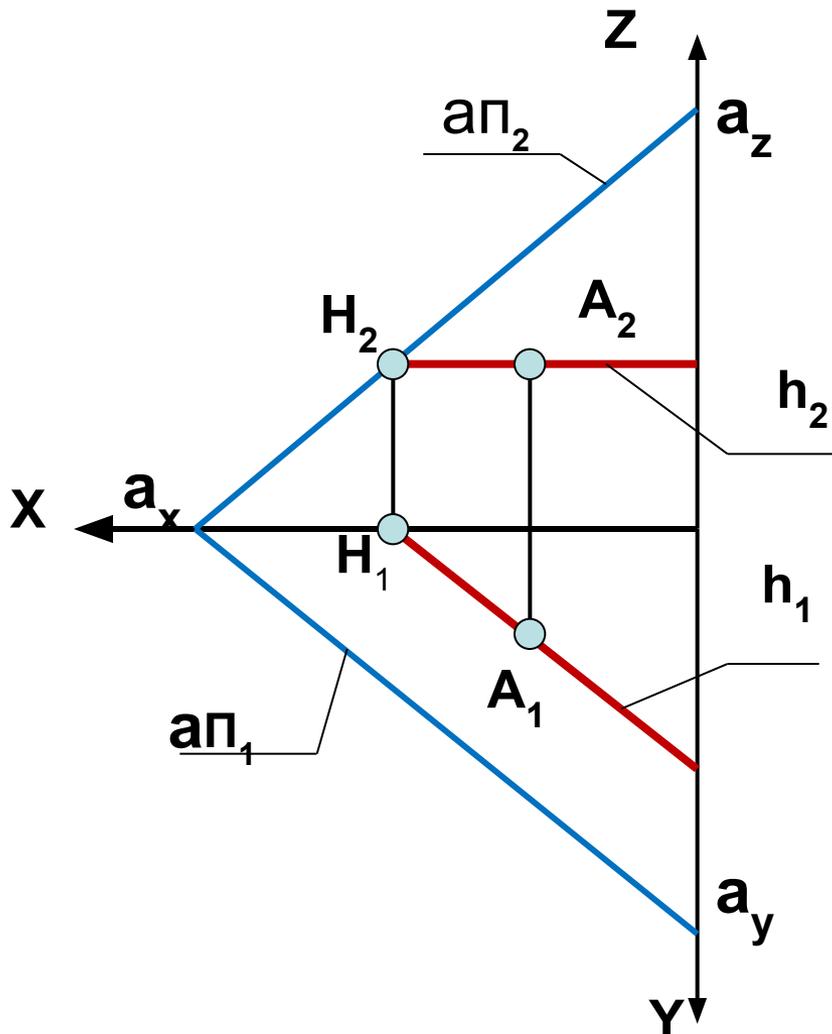
# ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

## Горизонталь плоскости



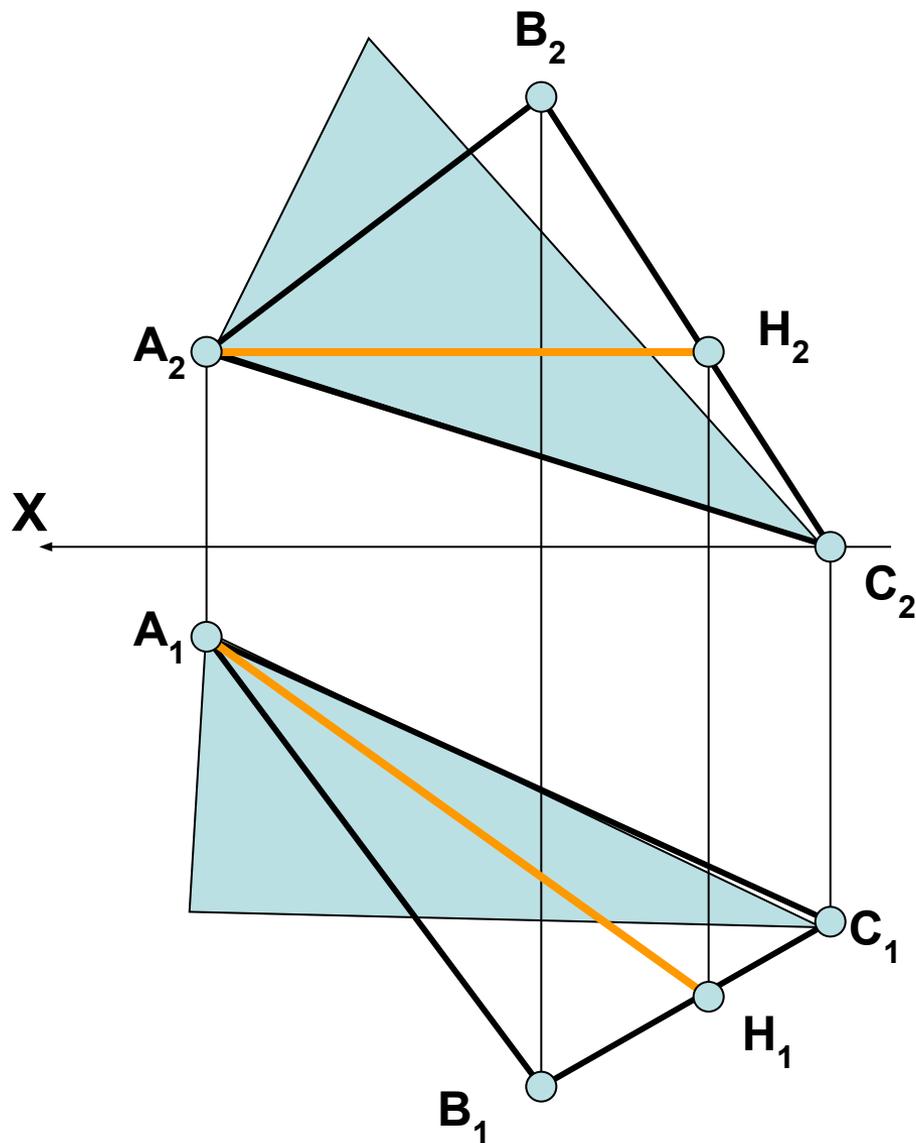
Горизонталь  $h$  принадлежит плоскости  $a$ , параллельна горизонтальному следу плоскости  $a$  и всегда параллельна горизонтальной плоскости проекций

# Горизонталь плоскости $\square$ , заданной следами



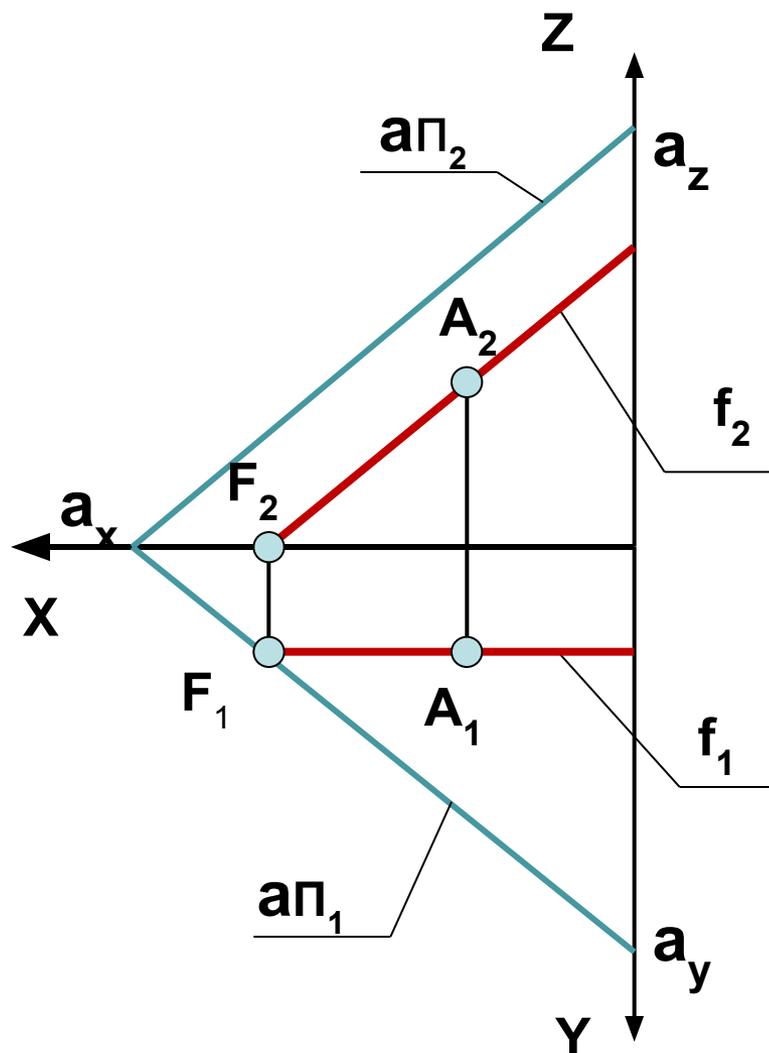
АН(**h**) горизонталь  
ПЛОСКОСТИ **a** всегда  
параллельна  
горизонтальному следу  
плоскости –  $\square_{п1}$

# Горизонталь плоскости треугольника



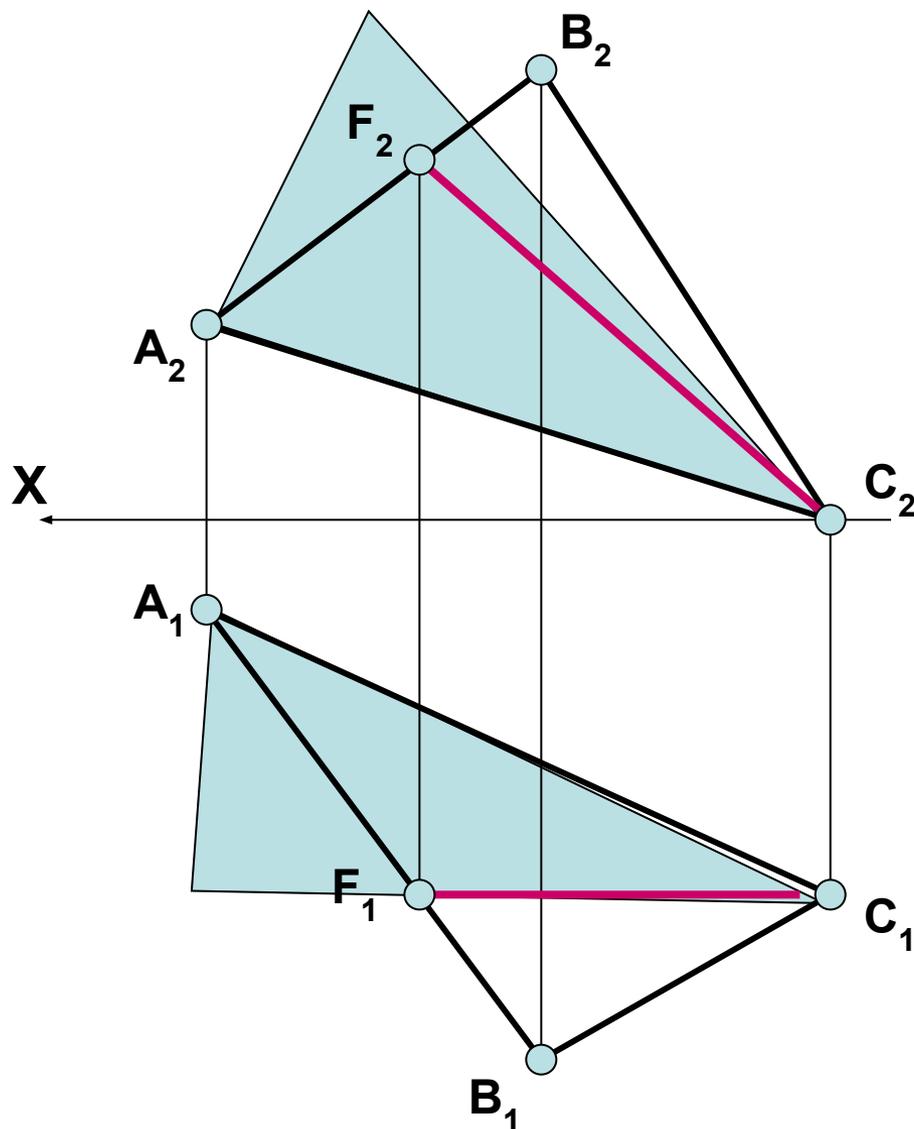
$AH(h)$ –  
горизонталь  
 $\triangle ABC$

## Фронталь плоскости $\square$ , заданной следами



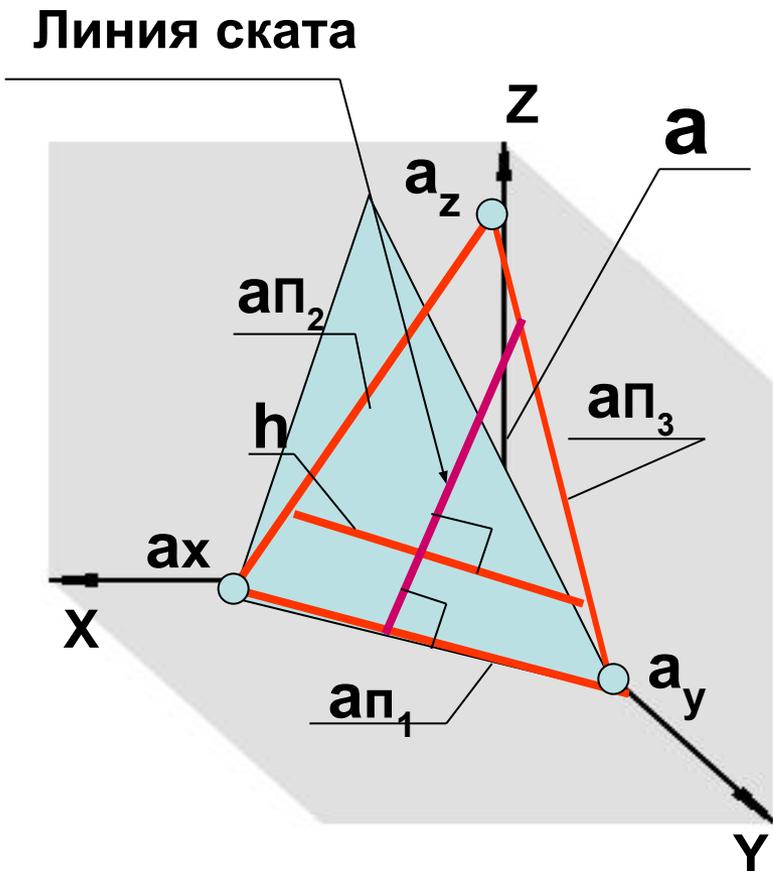
AF (**f**)- фронталь  
плоскости **a** всегда  
параллельна  
фронтальному следу  
плоскости  $\alpha\Pi_2$

# Фронталь плоскости треугольника



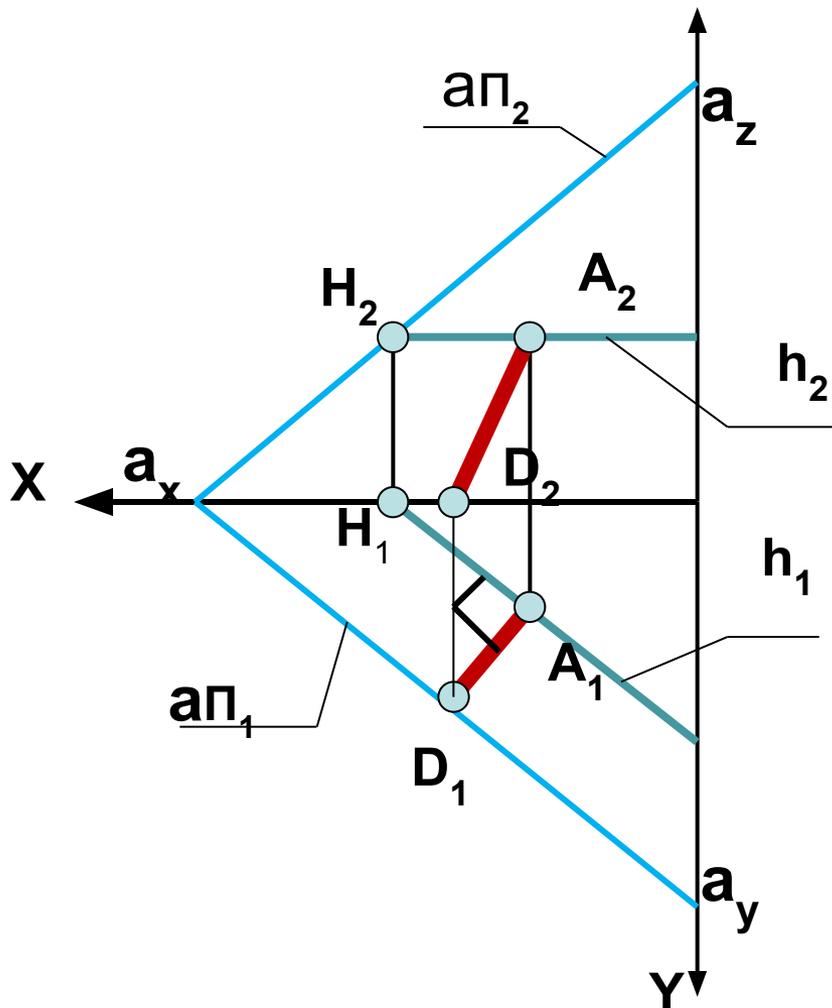
CF (f) фронталь  
плоскости  $\triangle ABC$

# Линия наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций (линия ската)



1. Линия наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к горизонтальной плоскости проекций - **линия ската** плоскости  $\alpha$ .
2. **Линия ската**  $\perp \alpha_{п1}$
3. **Линия ската**  $\perp h_1$

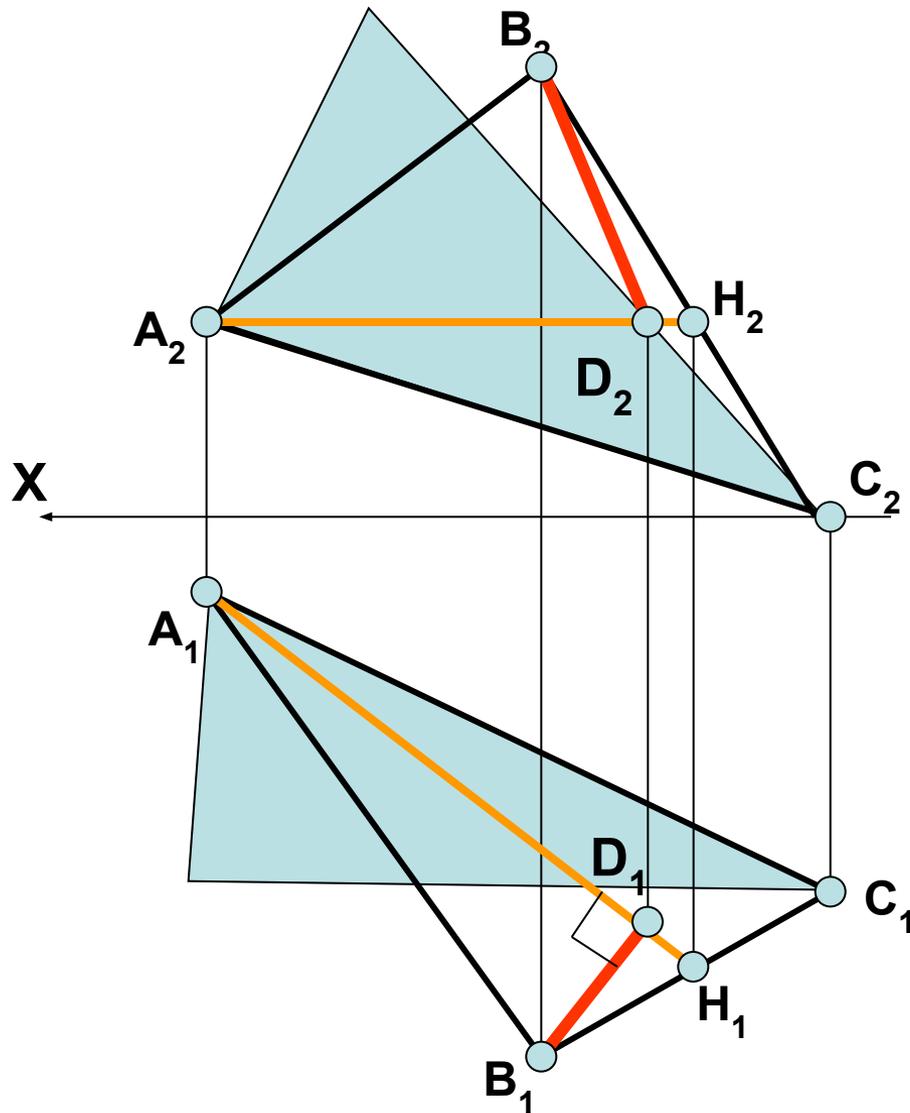
# Линия ската на горизонтальной плоскости проекций перпендикулярна горизонтали плоскости



$$A_1D_1 \perp A_1H_1 \parallel \Pi_1$$

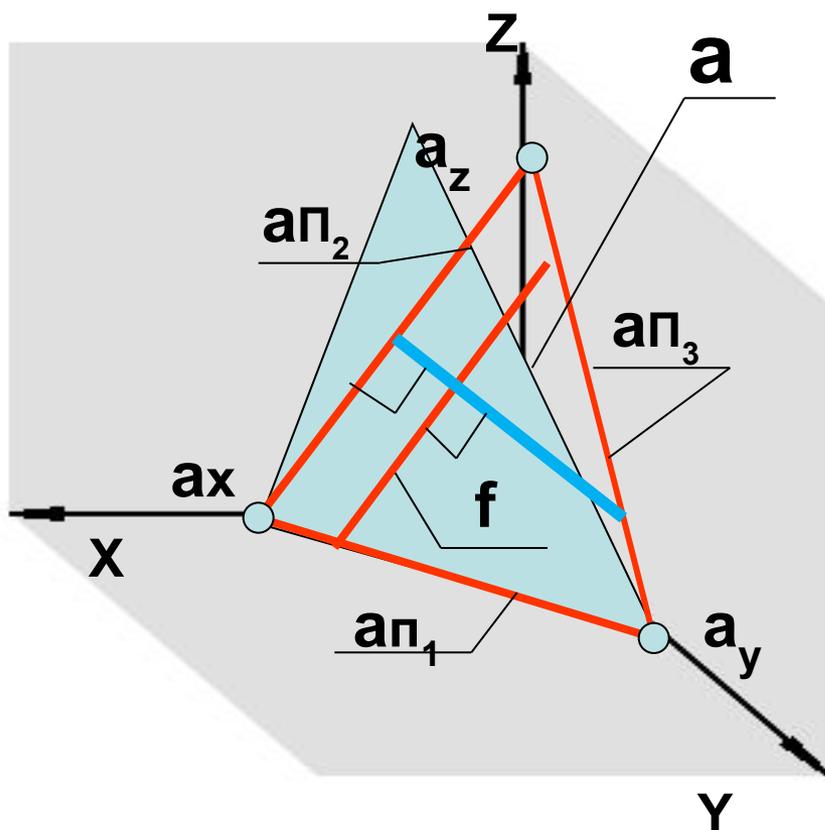
$$A_1D_1 \perp \alpha_{\Pi_1}$$

# Линия ската треугольника из наивысшей точки (В) перпендикулярна горизонтали



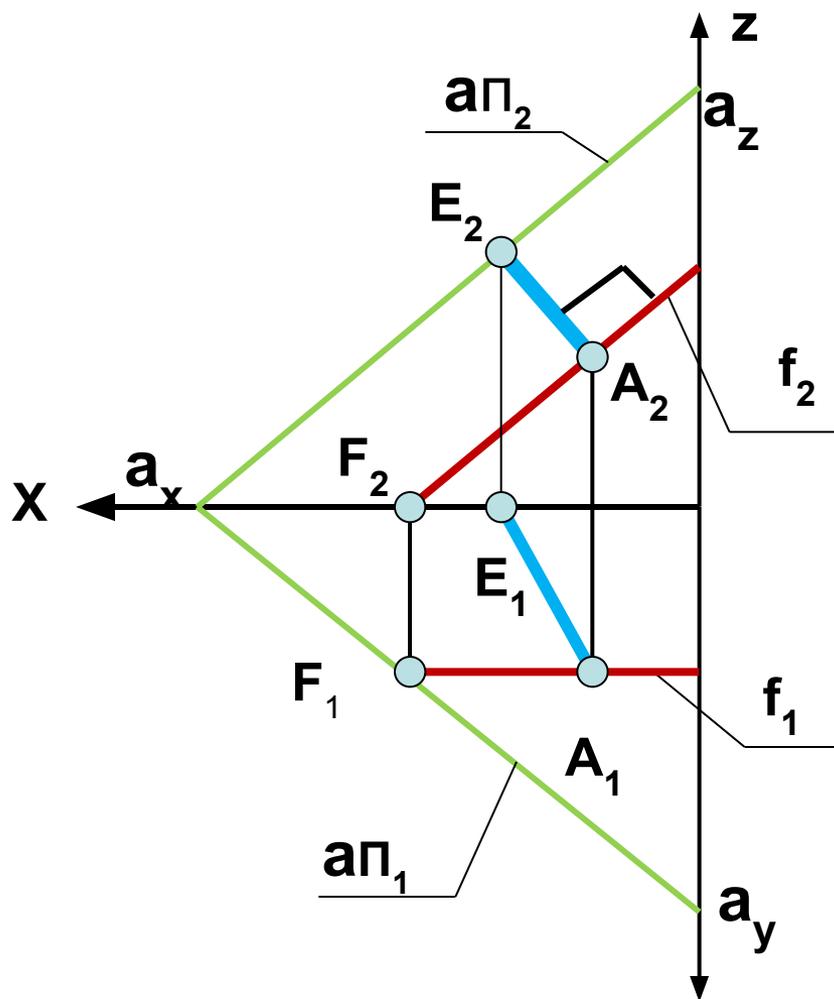
$B_1D_1 \perp A_1H_1$   
 $BD$  – линия ската  
треугольника

# Линия наибольшего наклона плоскости $\alpha$ к фронтальной плоскости проекций перпендикулярна фронтали



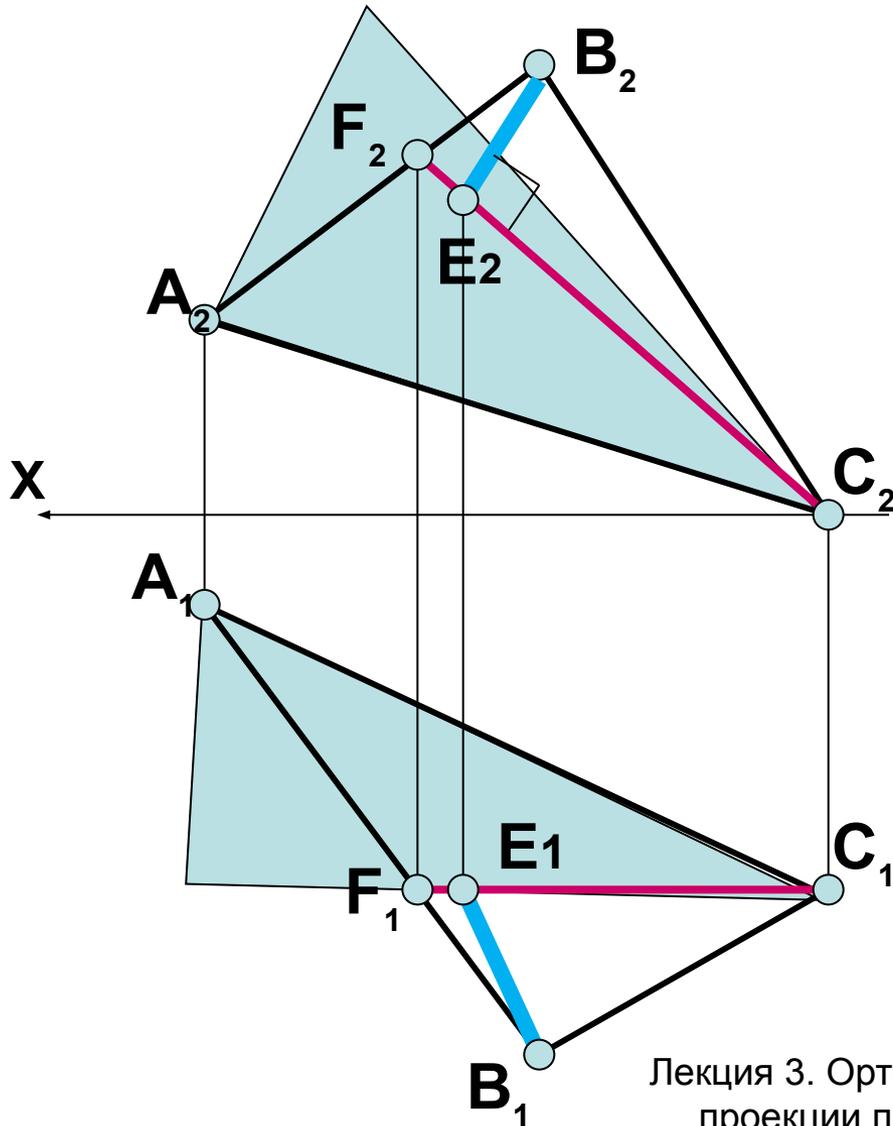
ЛНН к  $\Pi_2 \perp \alpha_{\Pi_2}$   
ЛНН к  $\Pi_2 \perp f \parallel \Pi_2$

# Линия наибольшего наклона плоскости $\alpha$ к фронтальной плоскости проекций перпендикулярна фронтальному следу



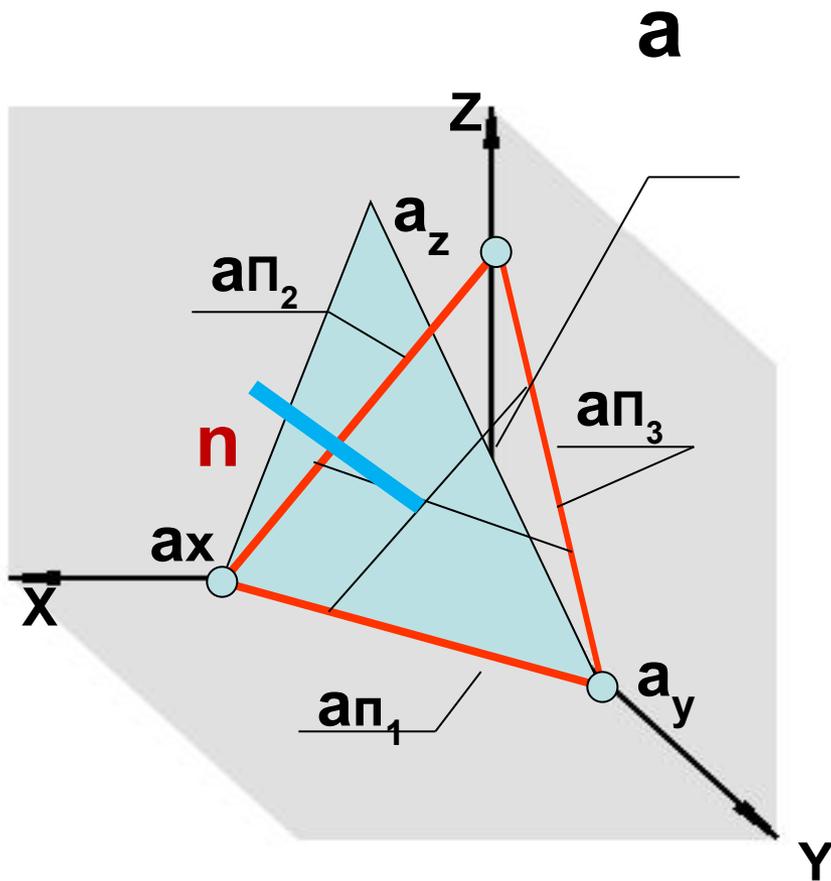
$$\begin{aligned}
 &AE - \text{ЛНН к } \Pi_2 \\
 &A_2E_2 \perp A_2F_2 \square \square \Pi_2 \\
 &A_2E_2 \perp \square \Pi_2
 \end{aligned}$$

Линия наибольшего наклона (линия ската)  
 плоскости  $\Delta ABC$  к фронтальной плоскости проекций  
 перпендикулярна **фронтали**

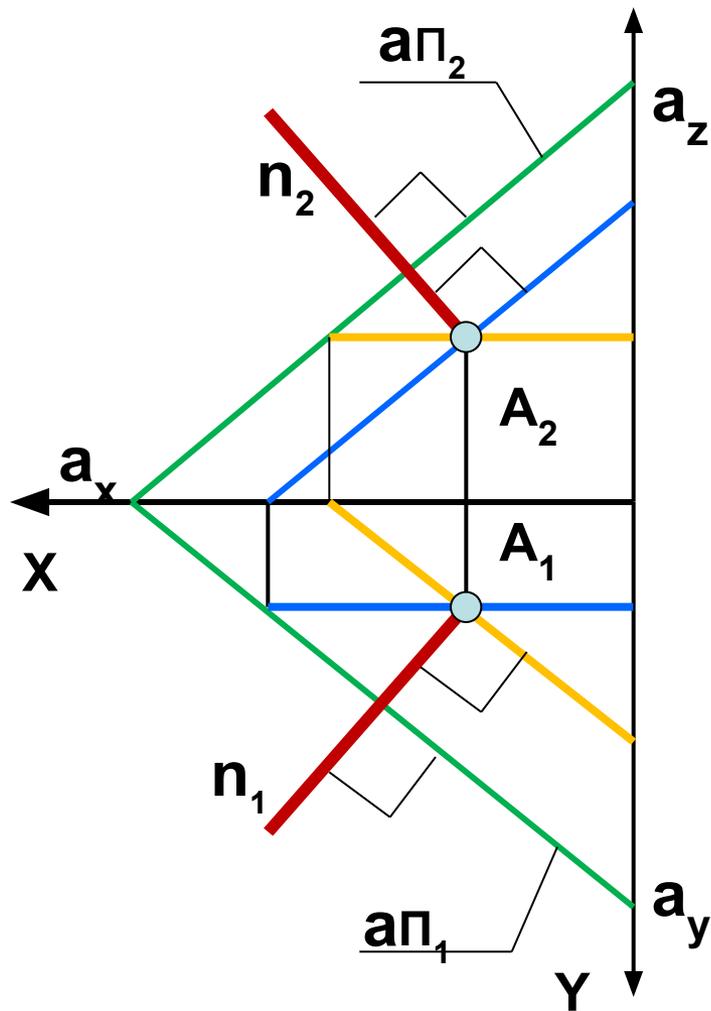


$BE$  – ЛНН к  $\Pi_2$   
 $B_2E_2 \perp C_2F_2 \square\square \Pi_2$

# Нормаль плоскости



- Нормаль плоскости  $n$   
– линия  
перпендикулярная к  
заданной плоскости

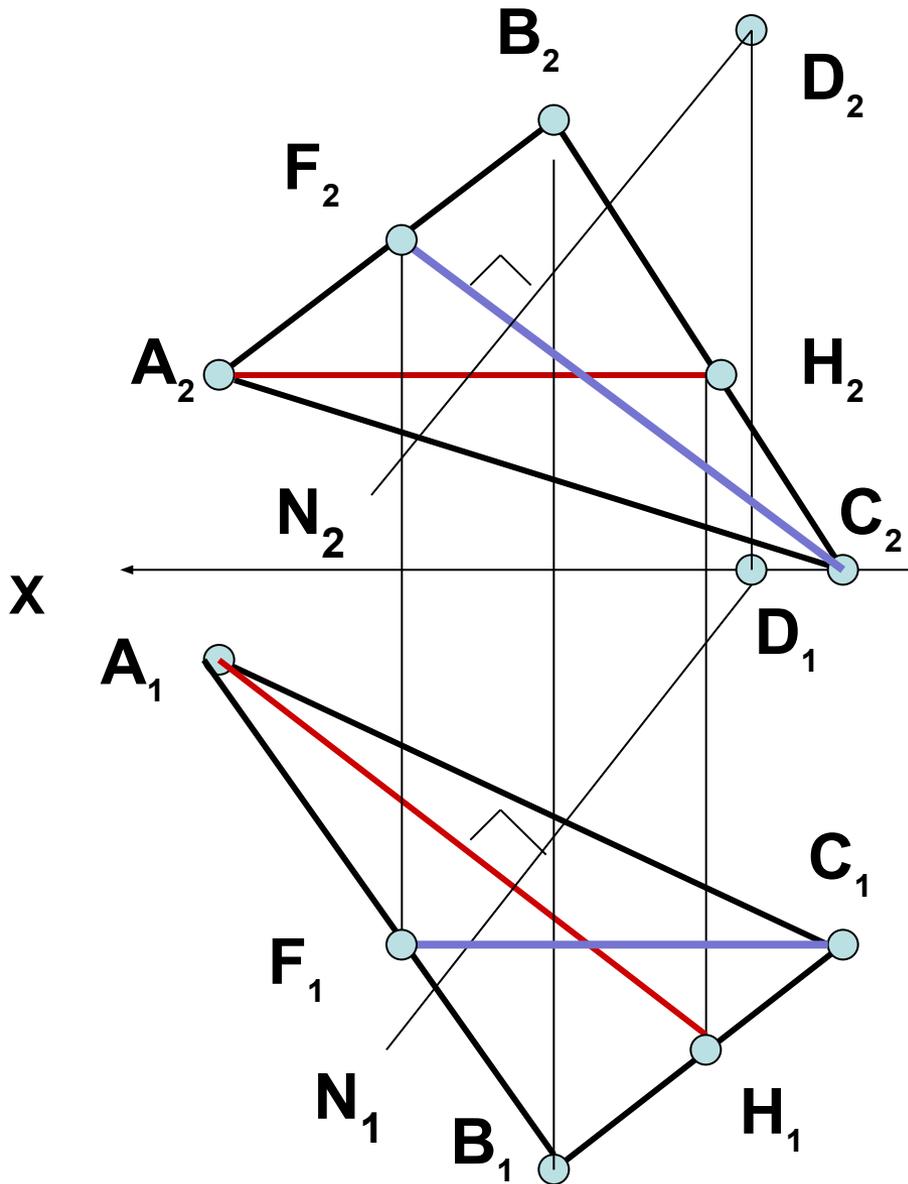


- Проекции нормали перпендикулярны проекциям линий уровня плоскости  $\mathbf{a}$ :  
 горизонтали на  $\Pi_1$   
 фронталы на  $\Pi_2$
- Проекции нормали перпендикулярны следам плоскости  $\mathbf{a}$ :

$$n_1 \perp a_{\Pi_1}$$

$$n_2 \perp a_{\Pi_2}$$

# НОРМАЛЬ ПЛОСКОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА



1. Проведем горизонталь  $AH$ . На горизонтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна горизонтали  $D_1N_1 \perp A_1H_1$

Точку  $N$  выберем произвольно

2. Проведем фронталь  $CF$

На фронтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна фронтали  $D_2N_2 \perp C_2F_2$

# Относительное положение прямой и плоскости

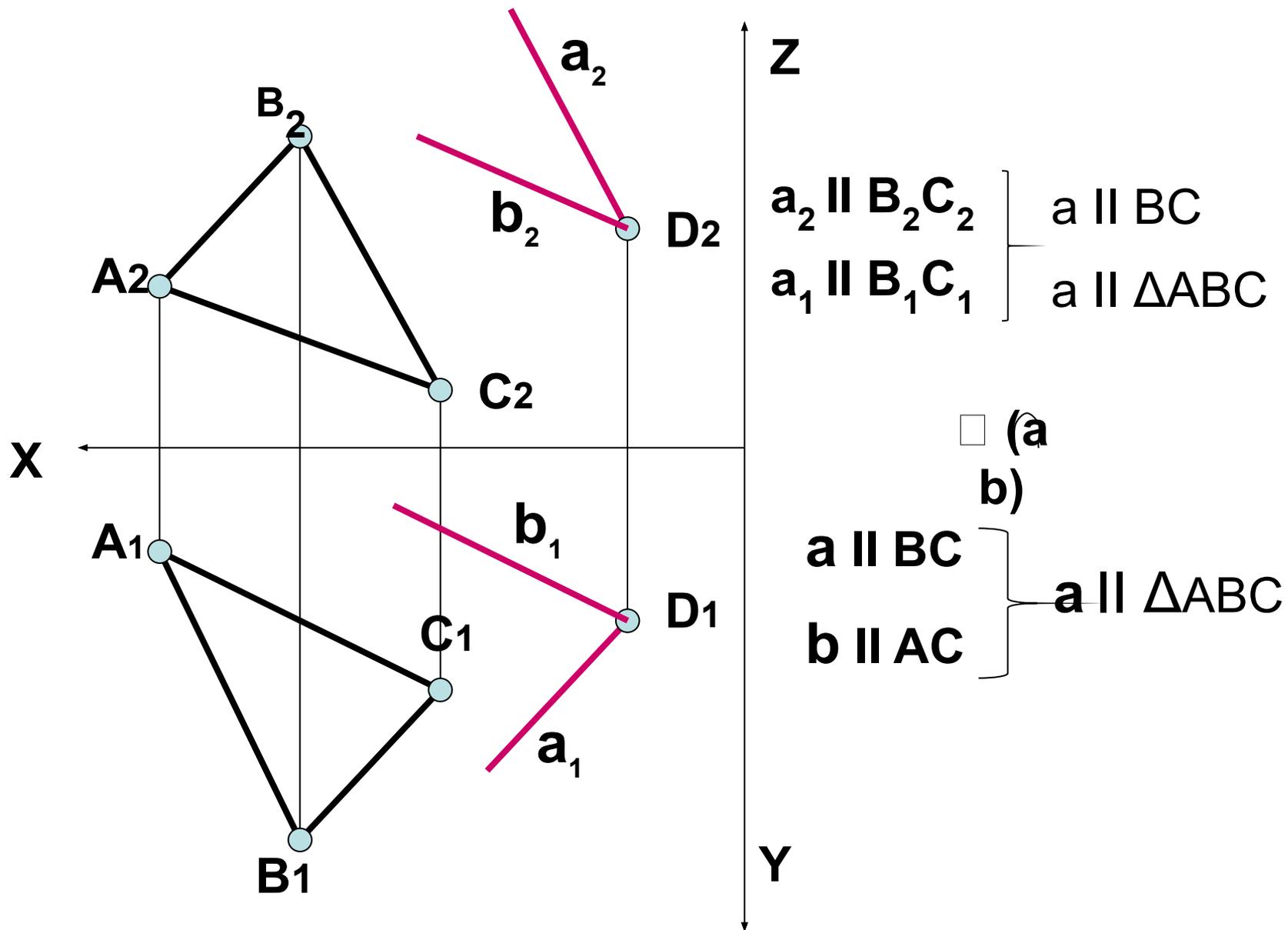
# Относительное положение плоскостей

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

## Параллельные плоскости

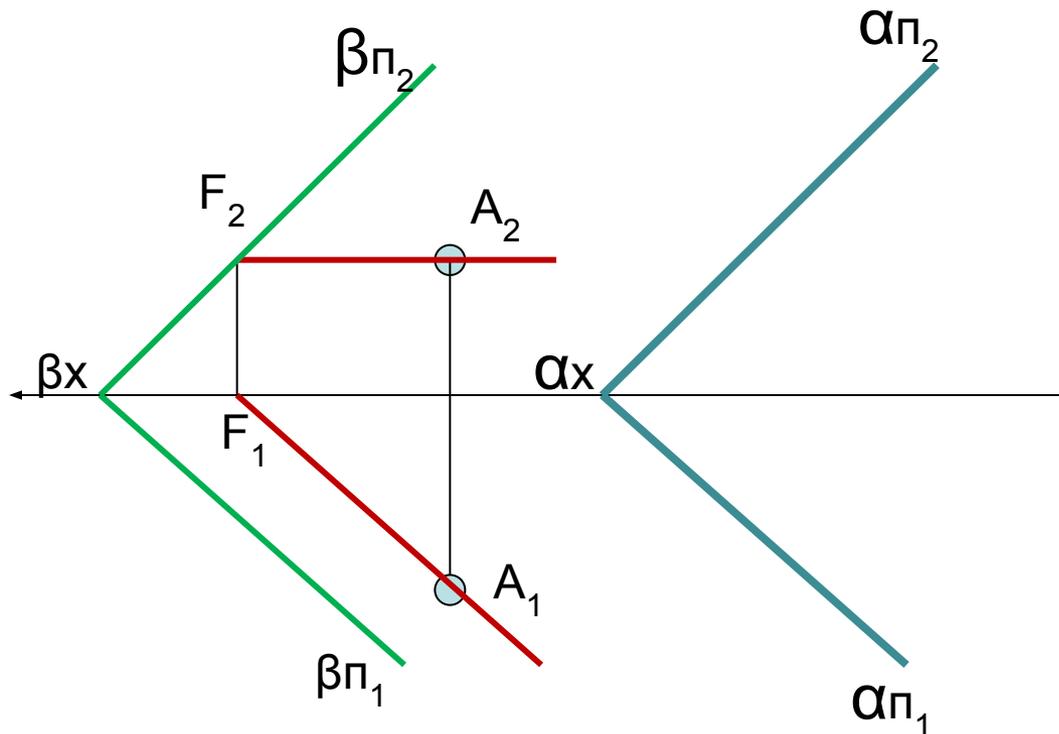
- 1. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости**
- 2. Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости, параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости**

- Через точку  $D$  провести прямую  $a$  параллельную  $\Delta ABC$  и плоскость  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) параллельную  $\Delta ABC$



# Построить следы плоскости $\beta$ , параллельной плоскости $\alpha$ и проходящей через точку $A$

Через точку  $A$  проведем горизонталь параллельно горизонтальному следу плоскости  $\alpha$

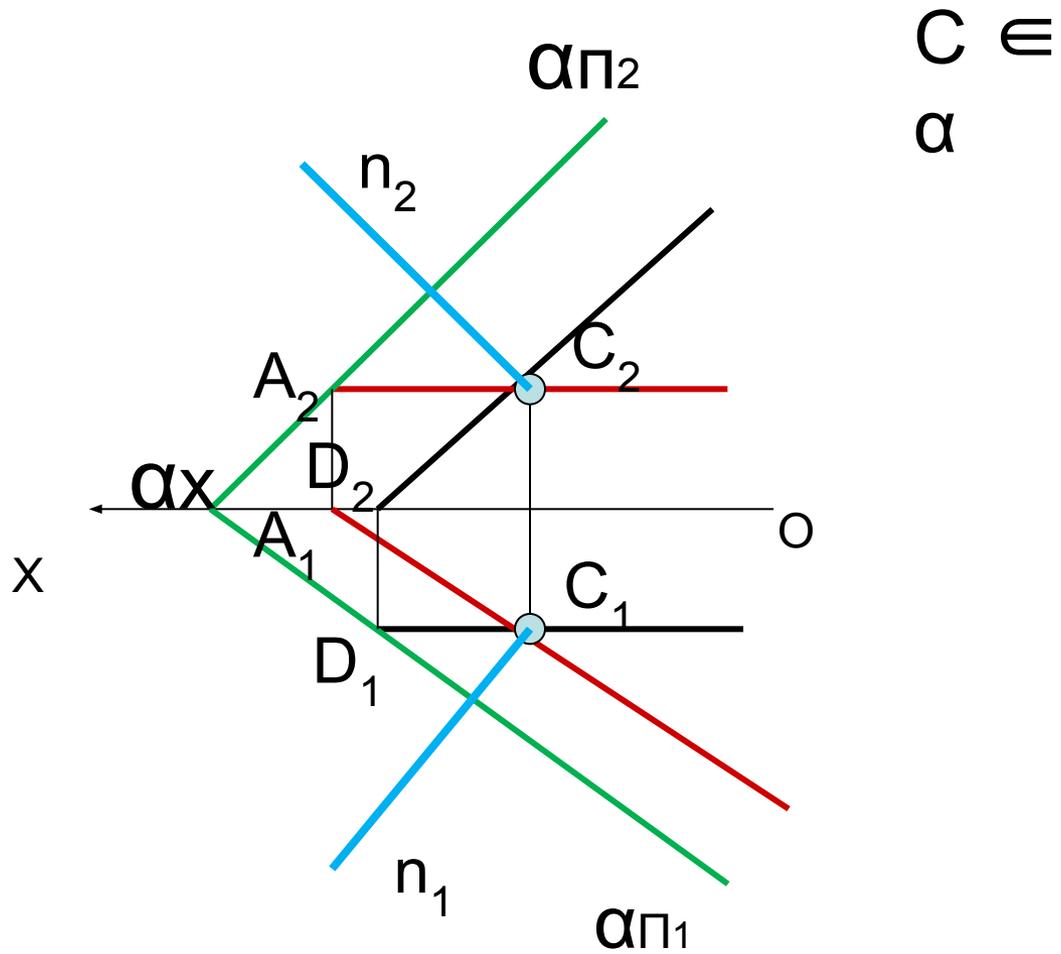


# Прямая перпендикулярная плоскости, перпендикулярные плоскости

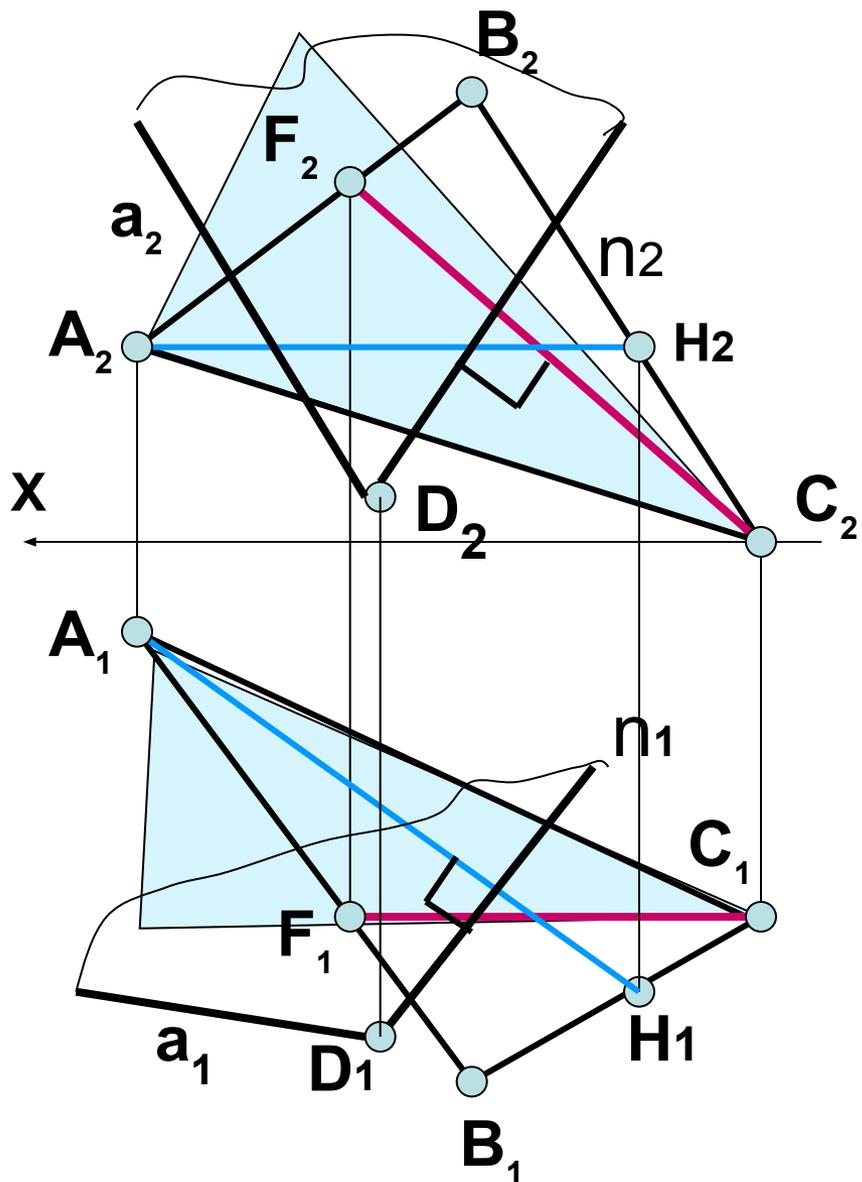
- *Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости*
- *В соответствии с теоремой о проекциях прямого угла прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна одноименным проекциям горизонтали и фронтали плоскости*
- *Две плоскости перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр к другой*

# Задача

- Построить проекции нормали плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $C$ , принадлежащей данной плоскости



- Через точку  $D$  провести перпендикуляр к плоскости  $\Delta ABC$  и плоскость  $\alpha$  ( $n \perp \alpha$ ) перпендикулярную  $\Delta ABC$
- $A(80, 10, 30)$
- $B(40, 60, 50)$
- $C(10, 45, 0)$
- $D(50, 55, 5)$



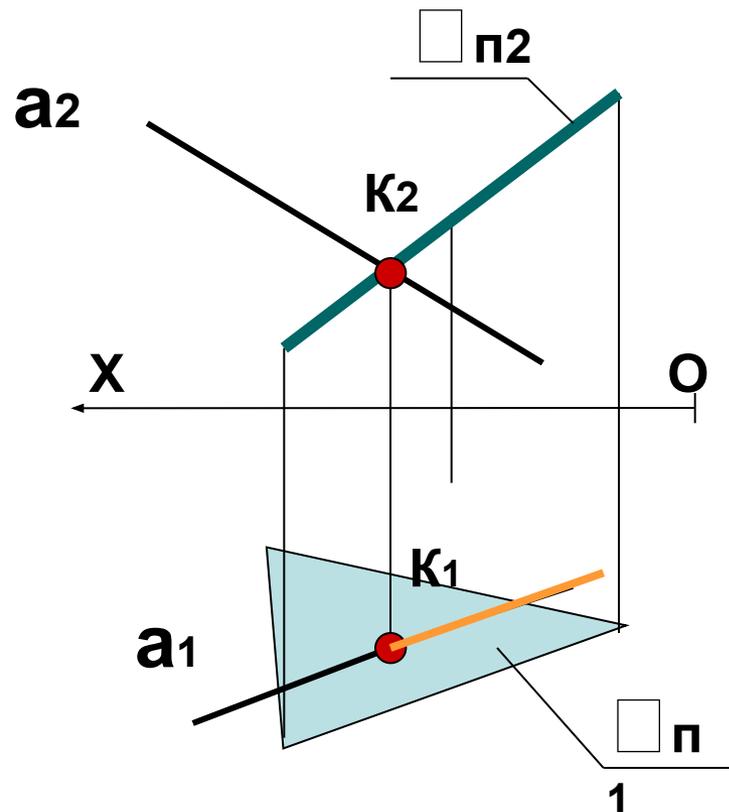
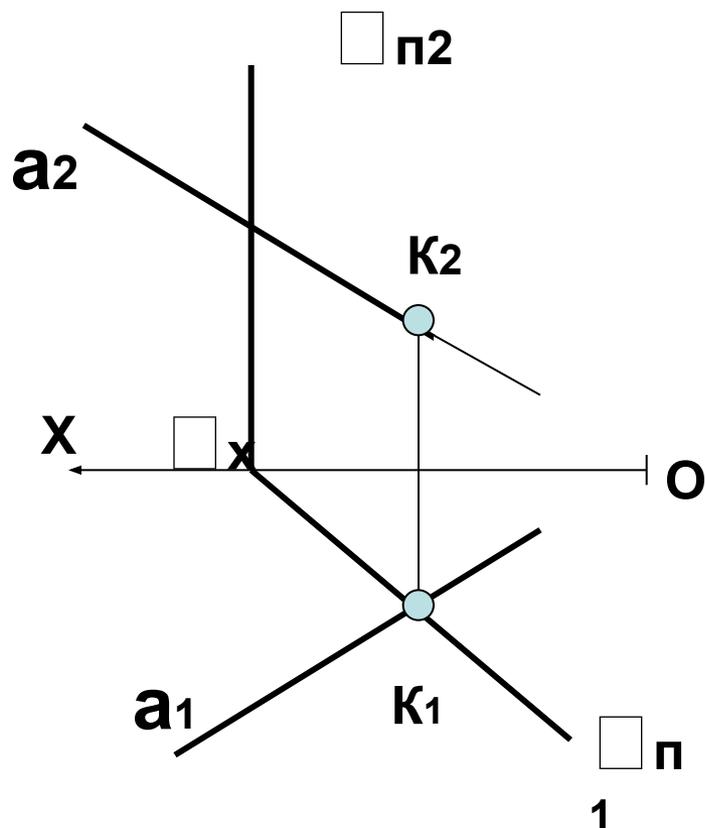
$$n_1 \perp A_1 H_1 \parallel \Pi_1$$

$$n_2 \perp C_2 F_2 \parallel \Pi_2$$

$a$  – произвольная  
прямая

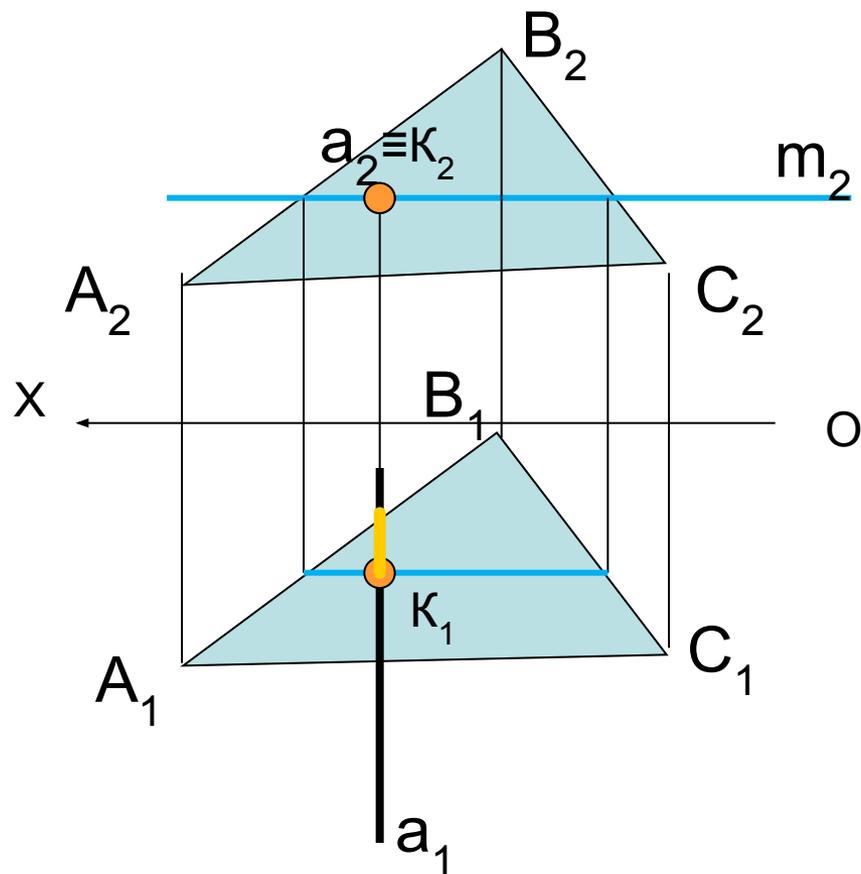
# ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

***ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ,  
ЕСЛИ У НИХ ЕСТЬ ОДНА ОБЩАЯ ТОЧКА***



- *Точка пересечения прямой и плоскости частного положения определяется на пересечении следа плоскости и проекции прямой*

# Пересечение прямой частного положения и плоскости общего положения

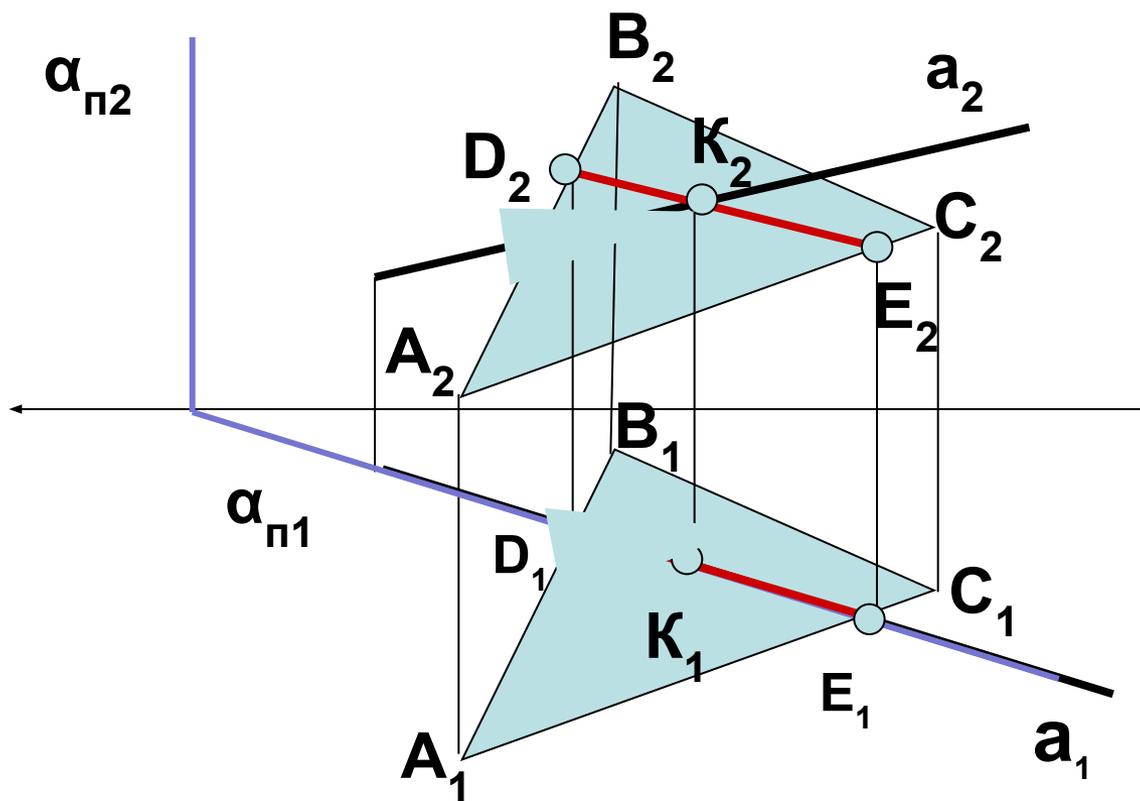


# Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения

## *СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ*

# Алгоритм способа плоскостей

- Прямую заключают в плоскость частного положения  $\alpha \perp \Pi_1$
- Определяют линию пересечения заданной плоскости и вспомогательной плоскости  $\alpha$
- Определяют точку пересечения заданной прямой и построенной линии пересечения
- Это искомая точка пересечения заданной плоскости и прямой  $a$
- Определяют видимость заданной прямой

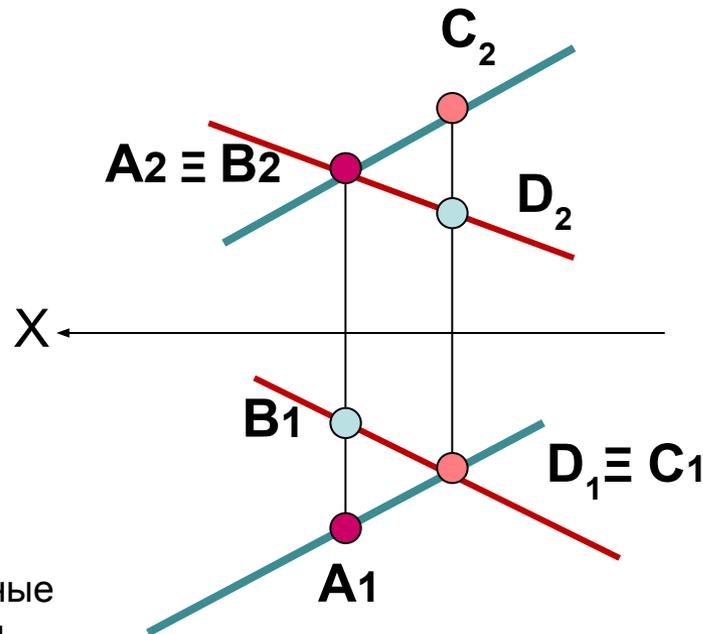


Видимость прямой определяют по конкурирующим  
точкам

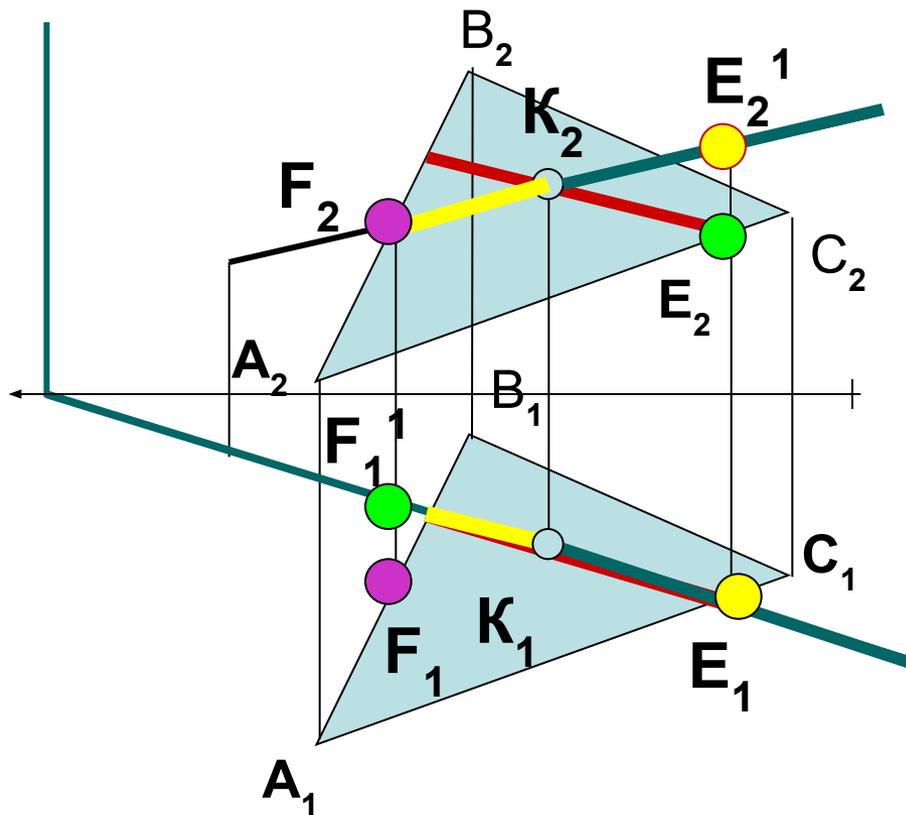
Видимость прямых определяют по конкурирующим точкам - которые принадлежат скрещивающимся прямым.

Конкурирующие точки располагаются дальше или ближе относительно плоскости  $\Pi_2$  (точки A и B), выше или ниже относительно плоскости  $\Pi_1$  (точки C и D).

*На горизонтальной плоскости проекций видима точка C имеющая большую координату Z,  
на фронтальной плоскости проекций видима точка A имеющая большую координату Y.*

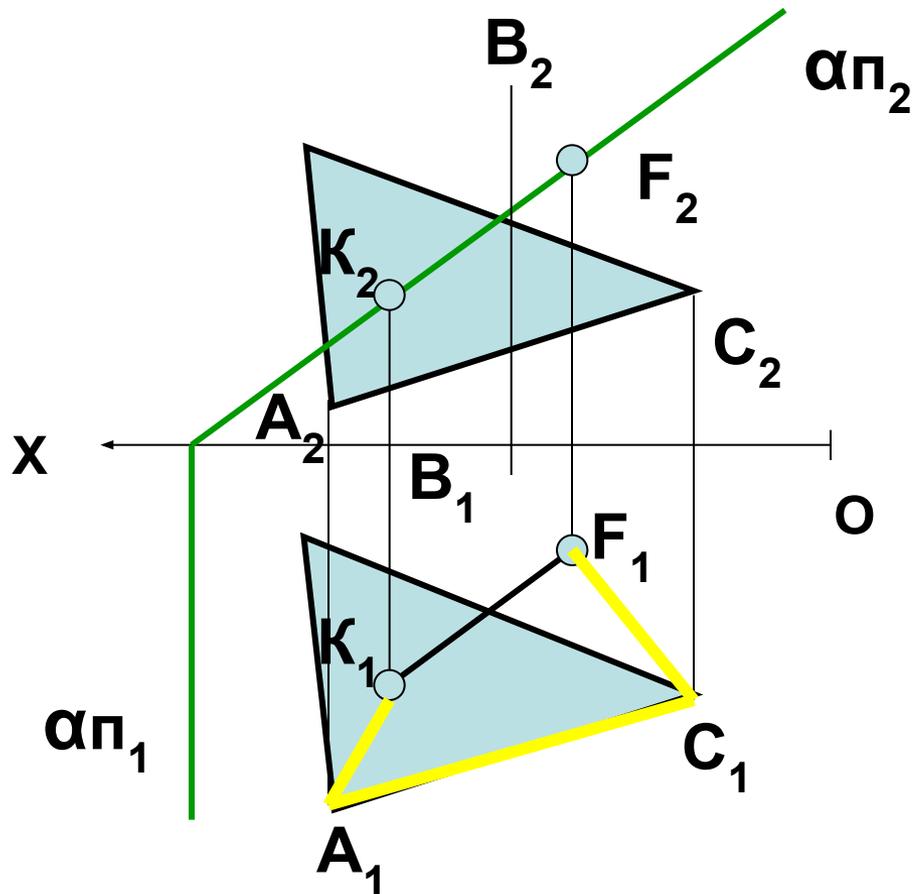


# Определение видимости прямой



**1. Плоскости пересекаются, если у них есть общие точки**

**2. Плоскости пересекаются по прямой линии, которая проходит через две общие точки плоскостей**



- Линия пересечения фронтально-проецирующей плоскости и плоскости общего положения определяется по точкам пересечения сторон треугольника  $\Delta ABC$  и фронтального следа плоскости  $\alpha$

## Список рекомендованной литературы

- **Бударин О. С.** Начертательная геометрия. Краткий курс: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям в обл. техники и технологий / О. С. Бударин. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар: Лань, 2009. - 368 с.: ил
- **Королев Ю. И.** Начертательная геометрия: учеб. для вузов инженер.-техн. специальностей / Ю. И. Королев. - 2-е изд. - Москва ; Санкт-Петербург ; Нижний Новгород [и др.]: Питер, 2010. - 256 с.: ил
- **Чекмарев А. А.** Начертательная геометрия и черчение: учеб. для студентов вузов, обучающихся по техн. специальностям / А. А. Чекмарев. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2011. - 471 с.: ил

**Благодарю за внимание**