ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Основные вопросы:

- Определение первообразной. Основное свойство первообразной.
- Понятие неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.
- Непосредственное интегрирование (*метод разложения*).
- Этапы интегрирования функций методом подстановки (*замены переменной*).
- Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Определение первообразной. Основное свойство первообразной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ называется ***первообразной*** для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ на интервале $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (конечном или бесконечном), если в каждой точке этого интервала $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ является производной для $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, т.е.

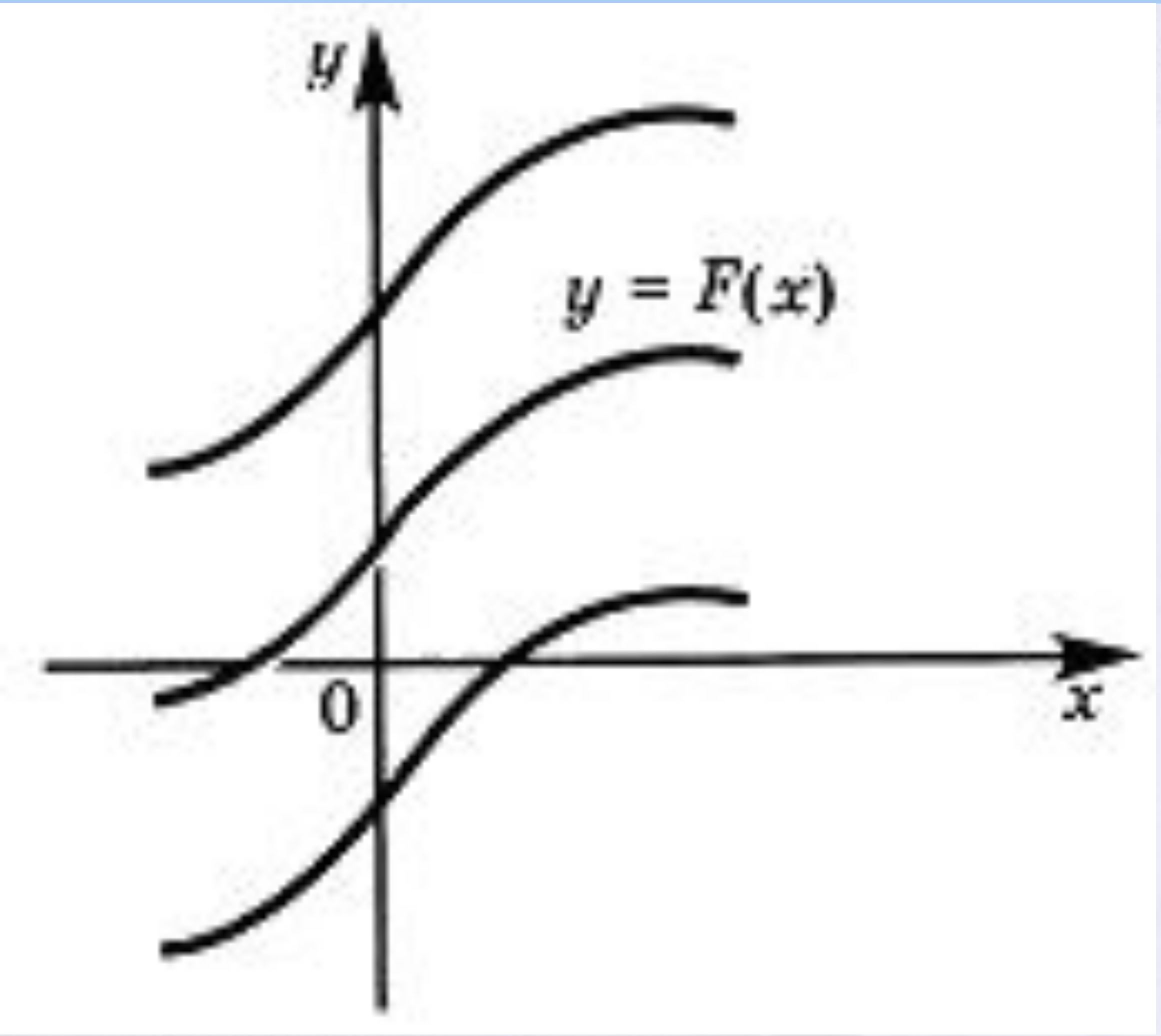
$$F'(x) = f(x)$$

Свойства первообразной:

1. **Если функция $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на интервале X, то функция $f(x) + C$, где C - произвольная постоянная, тоже будет первообразной для $f(x)$ на этом интервале.**

Этому свойству первообразных можно придать геометрический смысл: графики любых 2-х первообразных для функции f(x) получаются друг от друга параллельным переносом вдоль оси Oy

Свойства первообразной:



Свойства первообразной:

2. Если функция $F(x)$ - некоторая первообразная для функции $f(x)$ на интервале $X=(a,b)$, то любая другая первообразная $F_1(x)$ может быть представлена в виде

$F_1(x) = F(x) + C$, где C - постоянная на X функция.

Свойства первообразной:

3. Для любой первообразной $F(x)$ выполняется равенство $dF(x) = f(x)\,dx$.

Из этих свойств следует, что если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале X, то всё множество первообразных функции $f(x)$ (т.е. функций, имеющих производную $f(x)$ и дифференциал $f(x)\,dx$) на этом интервале описывается выражением $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

Таблица первообразных

	f(x)	F(x)	условия
1	x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in R, \alpha \neq -1, x > 0$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$x \neq 0$
3	e^{x}	e^{x}	$x \in R$
4	a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a} + c$	$a > 1, a \_= 1, x \in R$
5	Sin x	- cos x + c	$x \in R$
6	Cos x	Sin x +c	$x \in R$
7	$\frac{1}{\sin^2 x}$	- ctg x	$x \neq k\pi, k \in Z$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg x	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$
9	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsin x	
10	$\frac{1}{1+x^2}$	arctg x	

Понятие неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Множество первообразных функции *f*(*x*) называется *неопределённым интегралом* от этой функции и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

ПРИМЕР

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

поскольку функция $\frac{x^5}{5}$ *- первообразная для функции* x^4.

Процесс нахождения неопределенного интеграла функции называется интегрированием этой функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1. ***Производная неопределенного интеграла*** **равна подынтегральной функции:**

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Это свойство считается очень важным, его используют для проверки правильности вычисления интеграла.

Свойства неопределенного интеграла:

2. ***Дифференциал от неопределенного интеграла*** **равен подынтегральному выражению:**

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла:

3. Неопределенный интеграл ***от дифференциала функции*** **равен этой функции плюс произвольная постоянная:**

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

Свойства неопределенного интеграла:

4.*Постоянный множитель* можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Свойства неопределенного интеграла:

5.Неопределенный интеграл от ***суммы 2-х функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций*****:**

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Таблица неопределенных интегралов:

1	$\int 0 \cdot dx = C$	6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2	$\int 1 \cdot dx = x + C$	7	$\int \cos x dx = \sin x + C$
3	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$.	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int e^x dx = e^x + C$	10	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$
		11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\rvert + C,\ k \neq 0$

Таблица неопределенных интегралов:

12	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$
14	$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
15	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha} \right\rvert + C$
17	$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
18	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
19	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$ $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
20	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
21	$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert + C$
22	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$; $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x+\pi/2}{2}\right\rvert + C$

Непосредственное интегрирование (метод разложения).

Непосредственным интегрированием *называется метод нахождения интегралов, основанный на использовании таблицы и основных свойств неопределенных интегралов*

Здесь могут представиться следующие случаи:

1. данный интеграл сразу находится по таблице;
2. данный интеграл после применения свойств 4 и 5 сводится к табличным;
3. данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств 4 и 5 сводится к табличным.

ПРИМЕР

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Проверка: $\left(x^2 + C\right)' = 2x$

ПРИМЕР

$$\int \sin x = -\cos x + C$$

Проверка: $\left(-\cos x + C\right)' = \sin x$

ПРИМЕР

$$\int\left(5x^2-6x+\frac{8}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx=5\int x^2dx-6\int xdx+8\int x^{-5/4}dx=\frac{5}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+\frac{8}{-1/4}x^{-1/4}+C=$$

$$=\frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{32}{\sqrt[4]{x}}+C$$

Отметим несколько *полезных правил* для вычисления интегралов.

Если известна первообразная функции $f(x)$ *, т.е.*

$\int f(x)dx = F(x) + C$ *, а числа* a *и* b *константы, то:*

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

ПРИМЕР

$$\int 2^x \times 3^x\,dx = \int 6^x\,dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

ПРИМЕР

$$\int 2\sqrt{x}\,dx = 2\int \sqrt{x}\,dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{4}{5}x\sqrt{x} + c$$

ПРИМЕР

$$\int\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int x^3 dx + \int\frac{dx}{x^2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + c$$

ПРИМЕР

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$$

ПРИМЕР

- Найти $\int (5x+3)^5\, dx =$

- **Решение:** введем подстановку **u = 5x + 3** дифференциал этого выражения:
- **d (5x + 3) = du**
- **5dx = du**, откуда
- **dx = 1/5 du**
- Подставив вместо **5x +3** и **dx** их значения в данный интеграл, получим:

$$\int (5x+3)^5\, dx = \frac{1}{5}\int u^5\, du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{30}u^6 + c$$

Заменив ***u*** его выражением через ***x***, имеем:

$$\int (5x+3)^5\,dx = \frac{1}{30}(5x+3)^6 + c$$

- **Проверка:**

$$d\left[\frac{1}{30}(5x+3)^6 + c\right] = \frac{6}{30}(5x+3)^5 \cdot 5 \cdot dx = (5x+3)^5\,dx$$

- Интеграл найден правильно.

ПРИМЕР $\int x\sqrt[3]{x+1}dx =$

- Решение:

$$t^3 = x+1 \Rightarrow x = t^3 - 1$$

$$t = \sqrt[3]{x+1}$$

$$d(x+1) = d(t^3)$$

$$dx = 3t^2dt$$

Заменяя переменную в данном интеграле, имеем:

$$\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \int (t^3-1)t\cdot 3t^2dt = 3\int (t^6-t^3)dt = 3(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}) + c$$

Подставляя вместо t его выражение через x, найдем:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{x+1}\cdot dx = 3(\frac{(\sqrt[3]{x+1})^7}{7} - \frac{(\sqrt[3]{x+1})^4}{4}) + c = 3(\frac{(x+1)^2\cdot\sqrt[3]{x+1}}{7} - \frac{(x+1)\cdot\sqrt[4]{x+1}}{4}) + c =$$

$$\frac{3}{28}(x+1)\cdot(4x+3)\cdot\sqrt[3]{x+1} + c$$

ПРИМЕР

$$\int \sin(5x+3)\cdot dx = \int \sin u \frac{du}{5} = -\frac{1}{5}\cos u + c = -\frac{1}{5}\cos(5x+3)+c$$

$$5x+3=u$$

$$d(5x+3)=du$$

$$5dx=du$$

$$dx=\frac{du}{5}$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралы от произведений синусов и косинусов с разными аргументами, линейно зависящими от , упрощаются, если применить тригонометрические *формулы преобразования произведения в сумму*:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

- **Вычислим интеграл** $\int \cos 5x \sin 7x \, dx.$

- Преобразуем произведение $\cos 5x \sin 7x$ в сумму:

$$\cos 5x \sin 7x = \frac{1}{2}\left(\sin(7x - 5x) + \sin(7x + 5x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 12x\right).$$

$$\int \cos 5x \sin 7x \, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 2x + \sin 12x\right) dx =$$

- тогда

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 12x}{12}\right) + C = -\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 12x}{24} + C.$$

Упражнения :

$$\int 10^x dx$$

$$\int \left(e^x + 5\right) dx$$

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$\int x^5 dx$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\int e^{5x} dx$$

$$\int \sin 8x \cos 3x dx$$

$$\int \sin 3x \cdot \sin 2x dx$$

Домашнее задание: