

Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Примерами геометрических мест точек являются:

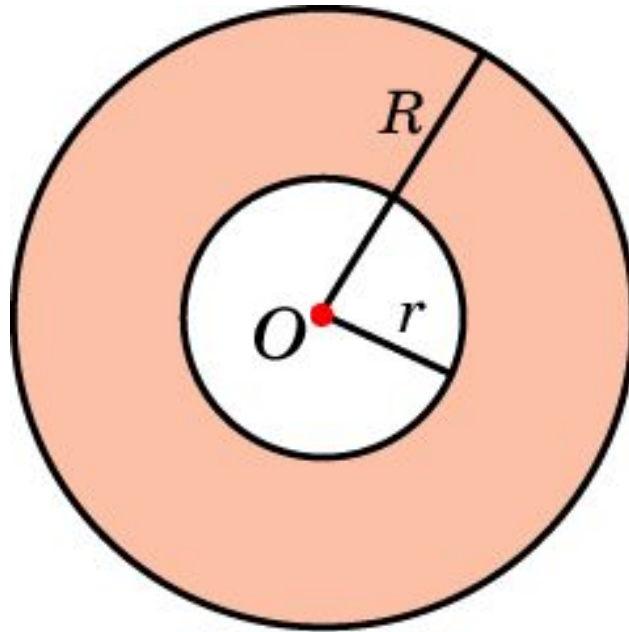
окружность – ГМТ, удаленных от данной точки на данное расстояние;

круг – ГМТ, удаленных от данной точки на расстояние, не превосходящее данное.

Упражнение 1

Пусть O – точка плоскости. Изобразите ГМТ X , для которых выполняются неравенства

$$r \leq OX \leq R.$$

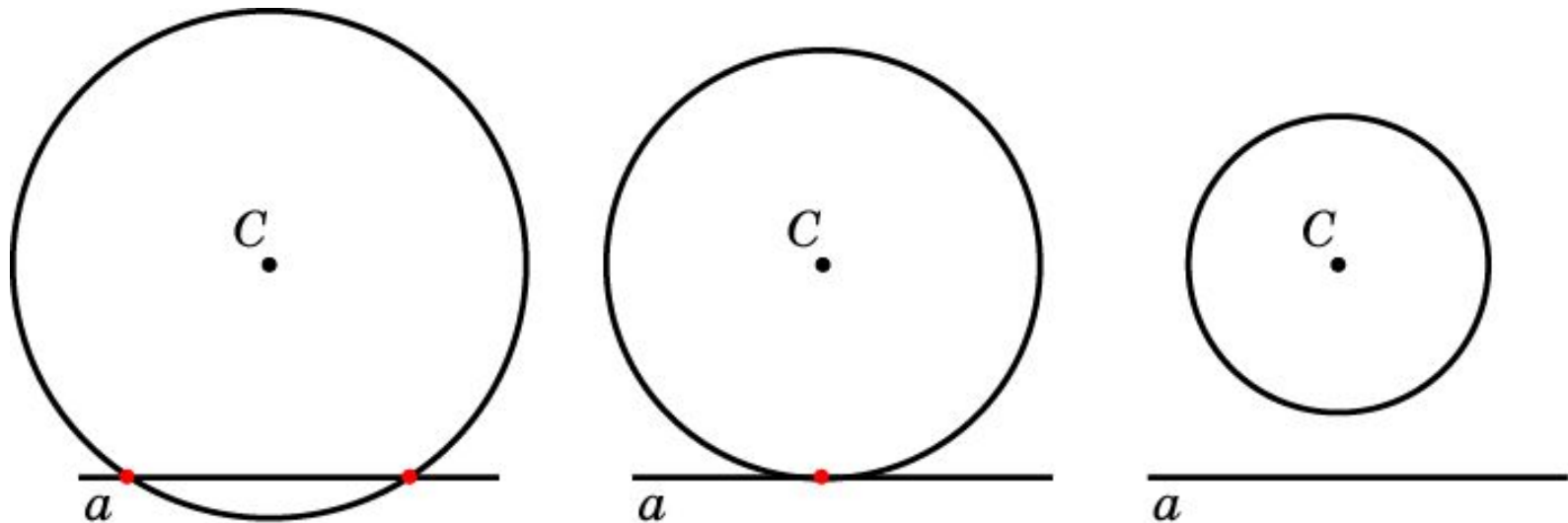


Ответ: Кольцо

Упражнение 2

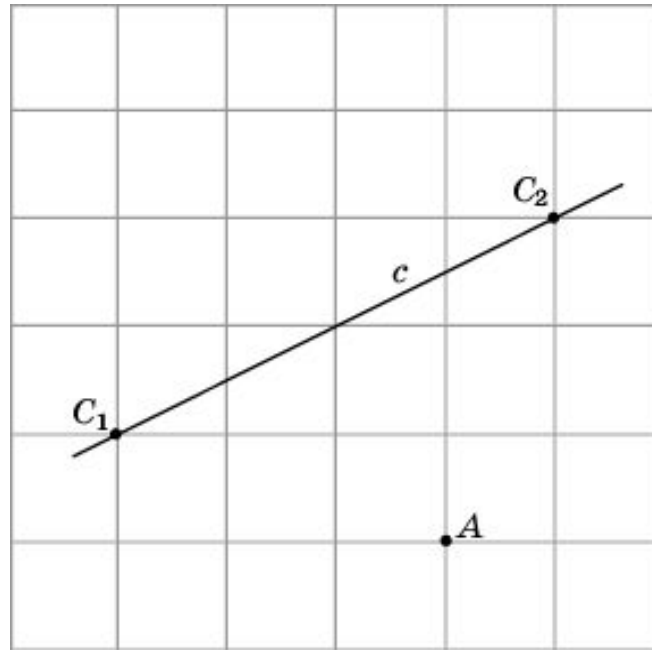
На данной прямой a найдите точки, удаленные от данной точки C на заданное расстояние R . Какие при этом возможны случаи?

Ответ: Точки пересечения прямой a и окружности с центром в точке C и радиусом R . Получаются две, одна или ни одной точки в зависимости от того, расстояние от точки C до прямой a больше R , равно R или меньше R соответственно.



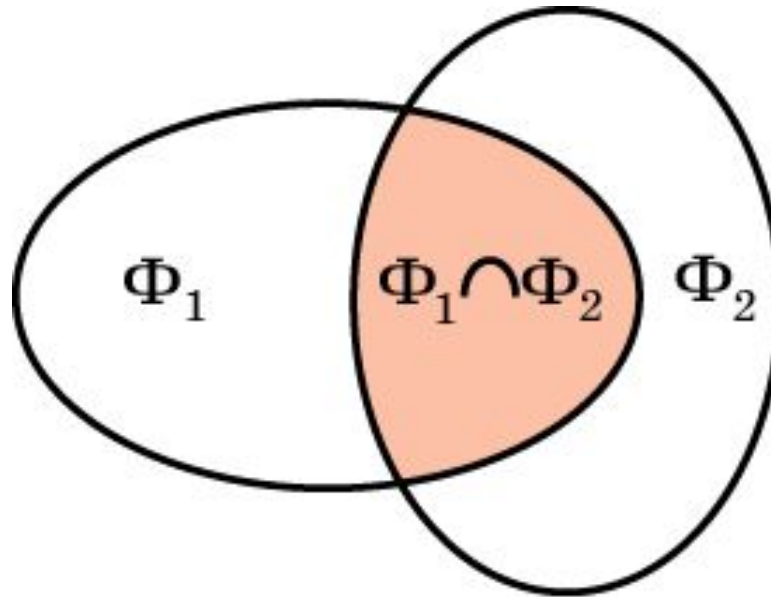
Упражнение 3

На прямой c отметьте точки, удаленные от точки A на расстояние, равное $\sqrt{2}$ (стороны квадратных клеток равны 1).



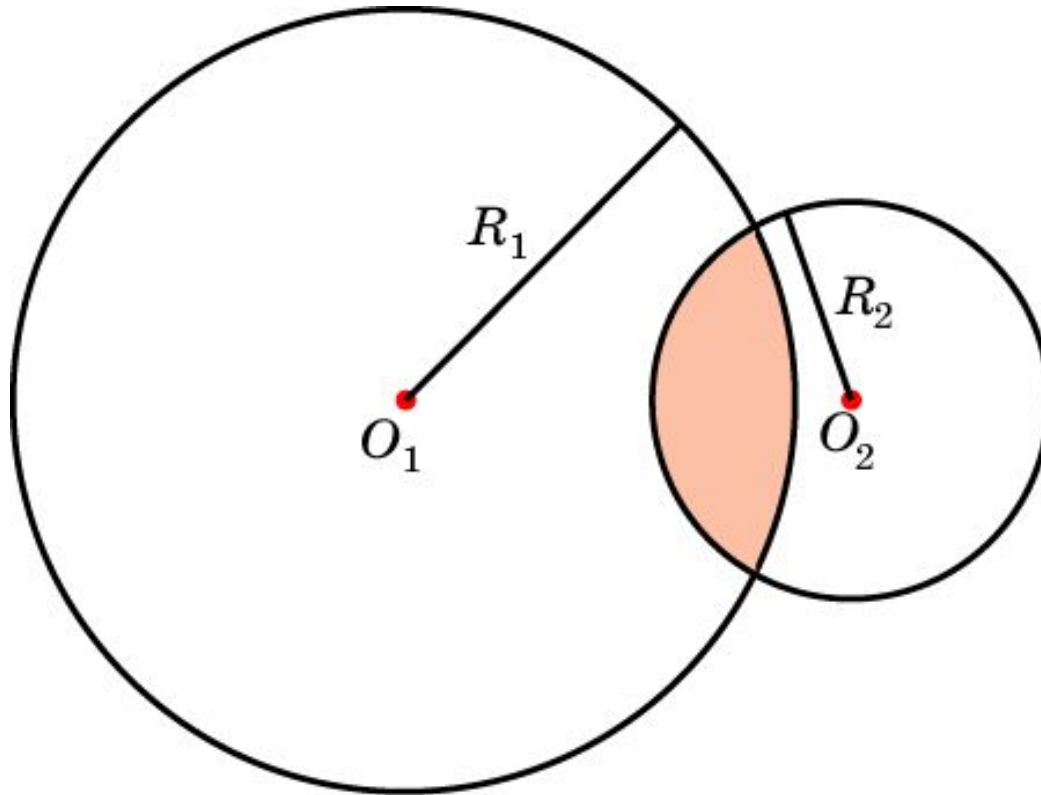
Пересечение фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 и фигуре Φ_2 , называется пересечением фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \cap \Phi_2$.



Упражнение 4

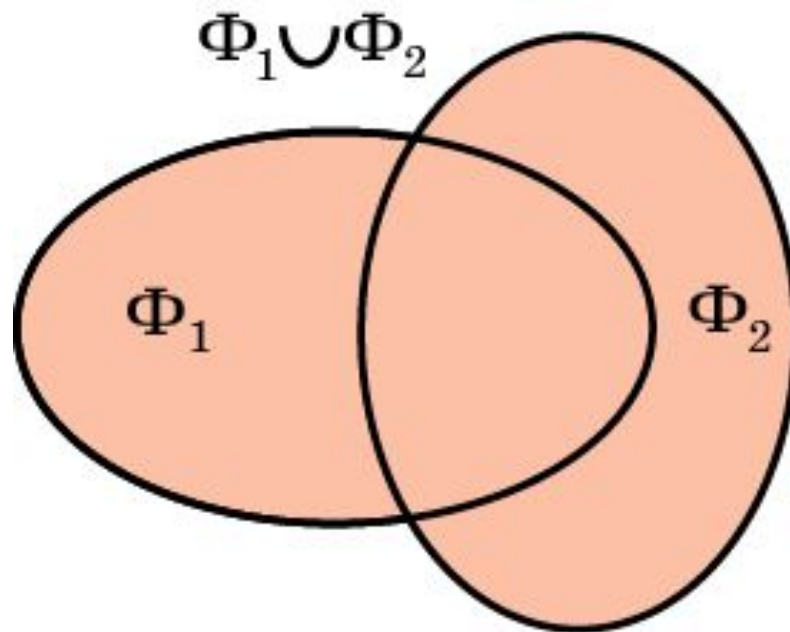
Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \leq R_2$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .

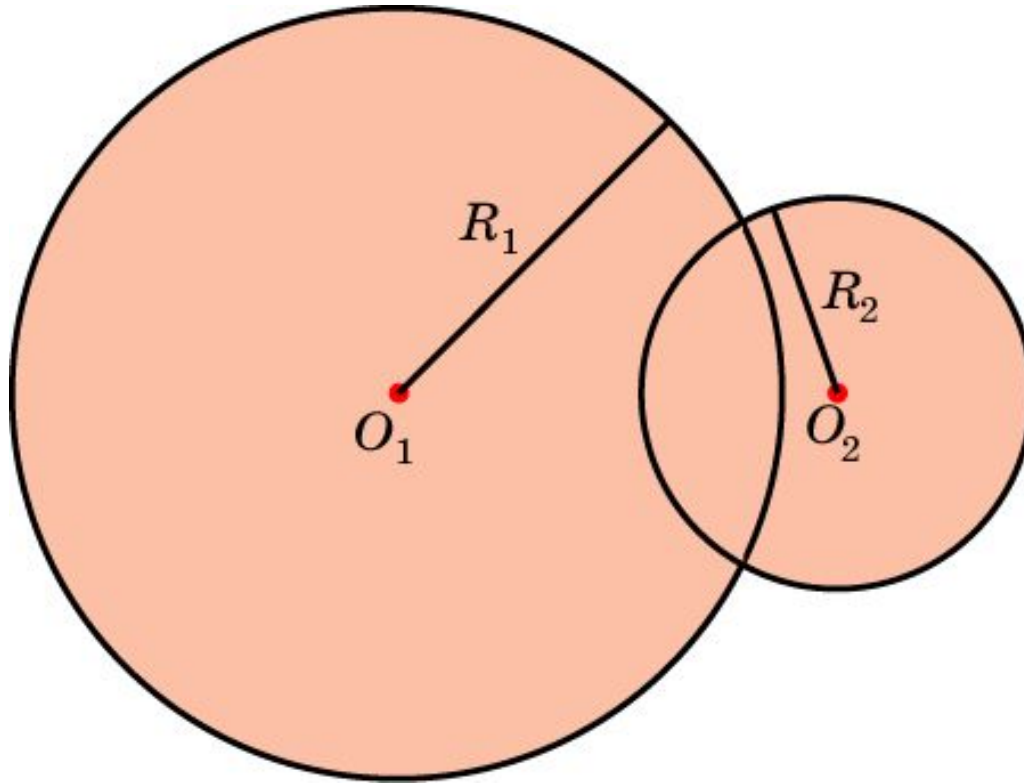
Объединение фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 или фигуре Φ_2 , называется объединением фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \cup \Phi_2$.



Упражнение 5

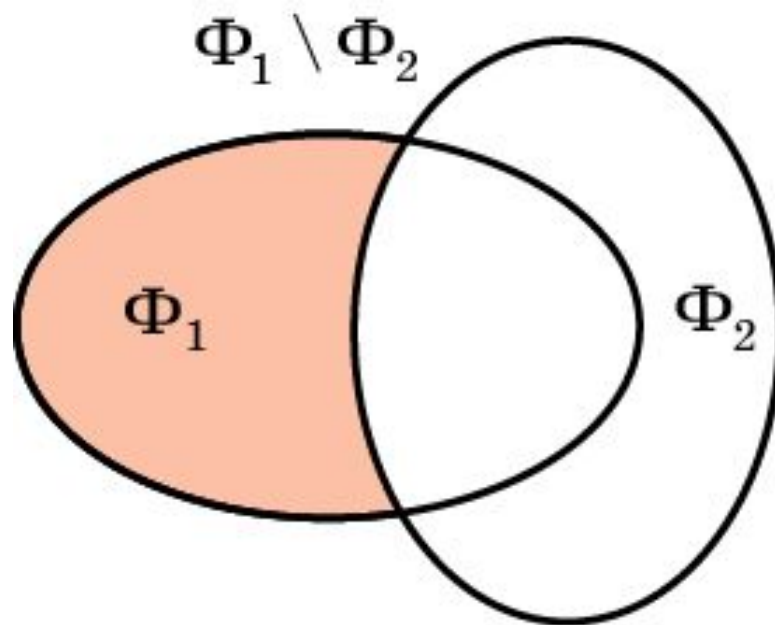
Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ или $XO_2 \leq R_2$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .

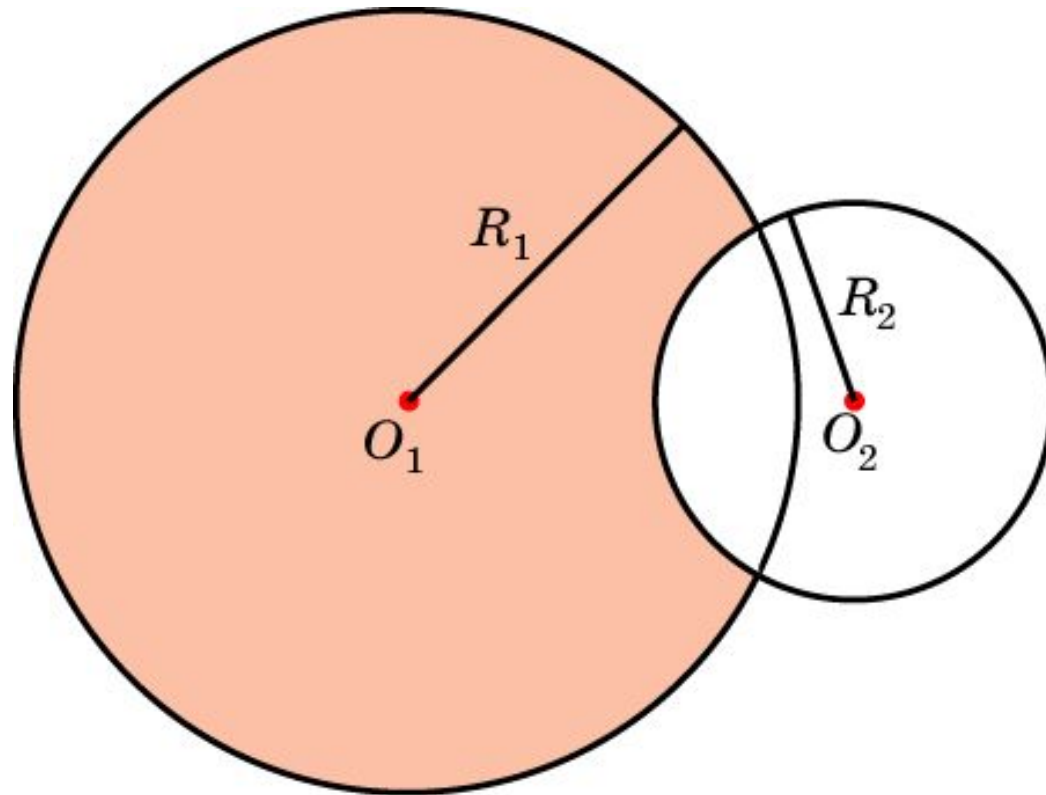
Разность фигур

Пусть Φ_1 и Φ_2 – фигуры на плоскости. Фигура Φ , состоящая из всех точек, принадлежащих фигуре Φ_1 и не принадлежащих фигуре Φ_2 , называется разностью фигур Φ_1 и Φ_2 и обозначается $\Phi_1 \setminus \Phi_2$.



Упражнение 6

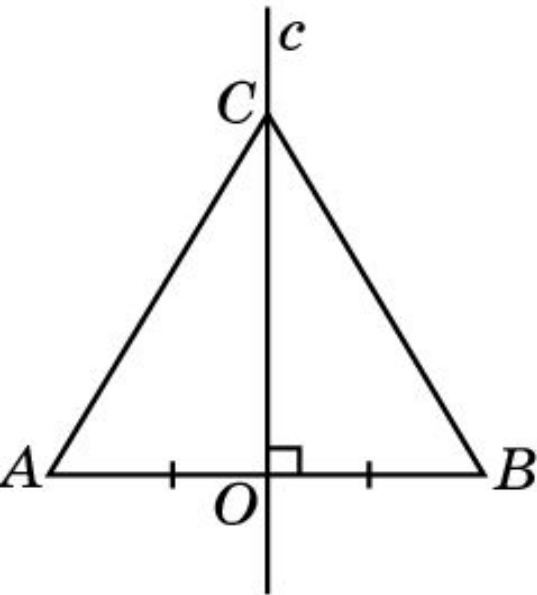
Даны две точки O_1 и O_2 . Найдите ГМТ X , для которых $XO_1 \leq R_1$ и $XO_2 \geq R_2$. Разностью каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является разностью двух кругов с центрами в точках O_1 , O_2 и радиусами R_1 , R_2 .

Серединный перпендикуляр

Серединным перпендикуляром к заданному отрезку называется ...
прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



Теорема. Серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, одинаково удаленных от концов этого отрезка.

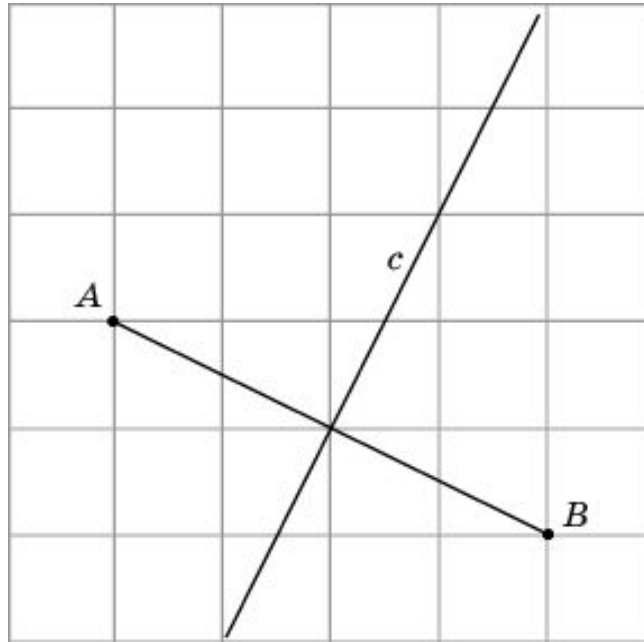
Доказательство. Пусть дан отрезок AB и точка O – его середина. Очевидно, точка O одинаково удалена от точек A, B и принадлежит серединному перпендикуляру. Пусть точка C одинаково удалена от точек A и B и не совпадает с точкой O .

Тогда треугольник ABC равнобедренный и CO – медиана. По свойству равнобедренного треугольника медиана является также и высотой. Значит, точка C принадлежит серединному перпендикуляру.

Обратно, пусть точка C принадлежит серединному перпендикуляру и не совпадает с O , тогда прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по катетам). Следовательно, $AC=BC$.

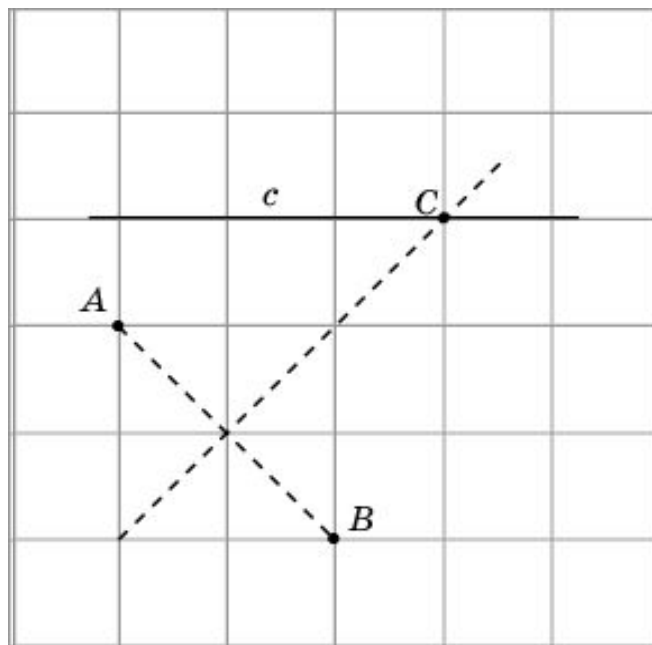
Упражнение 7

Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B .



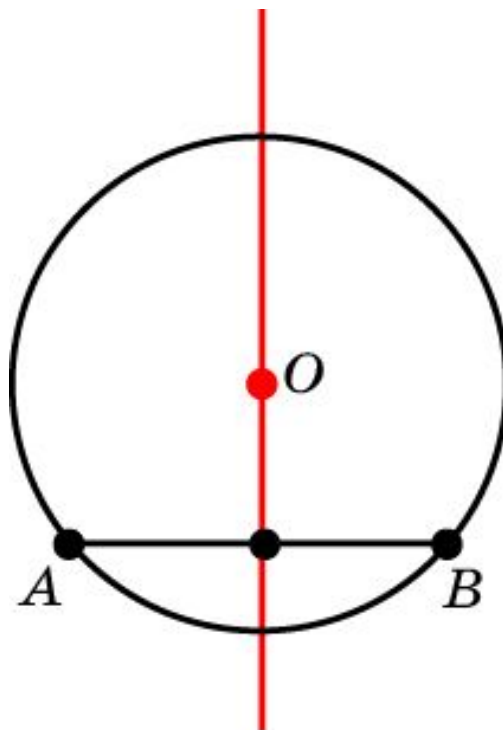
Упражнение 8

На прямой c отметьте точку C равноудаленную от точек A и B .



Упражнение 9

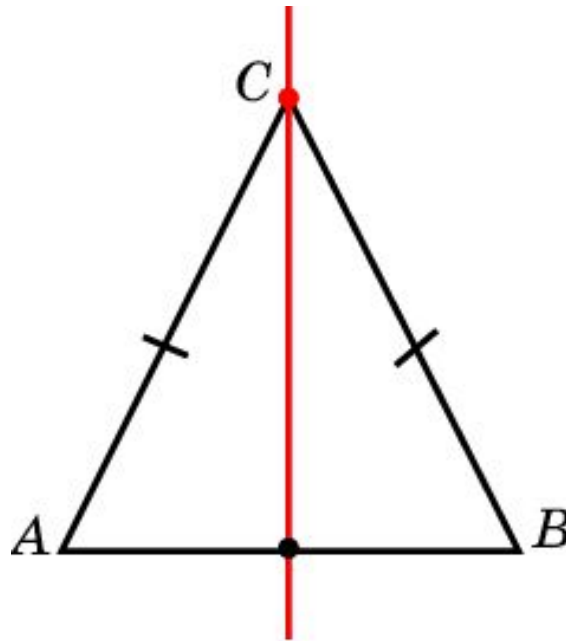
Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.



Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему две данные точки.

Упражнение 10

Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с заданным основанием AB .

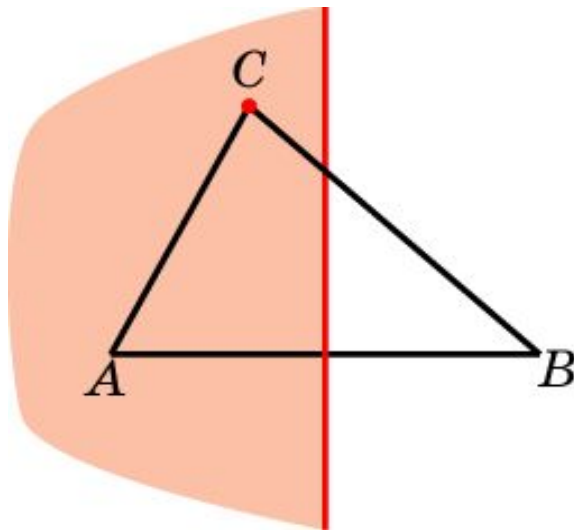


Ответ: Серединный перпендикуляр к отрезку AB без середины этого отрезка.

Упражнение 11

Пусть A и B - точки плоскости. Найдите геометрическое место точек C , для которых $AC \leq BC$.

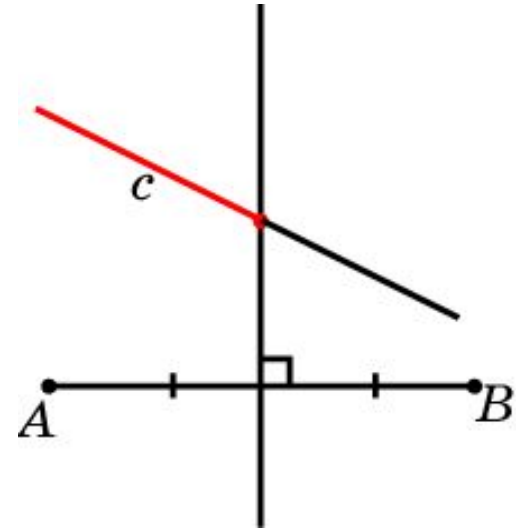
Ответ: Полуплоскость, определяемая серединным перпендикуляром к отрезку AB , содержащая точку A ;



Упражнение 12

Пусть A и B точки плоскости, c - прямая. Найдите геометрическое место точек прямой c , расположенных ближе к A , чем к B . В каком случае таких точек нет?

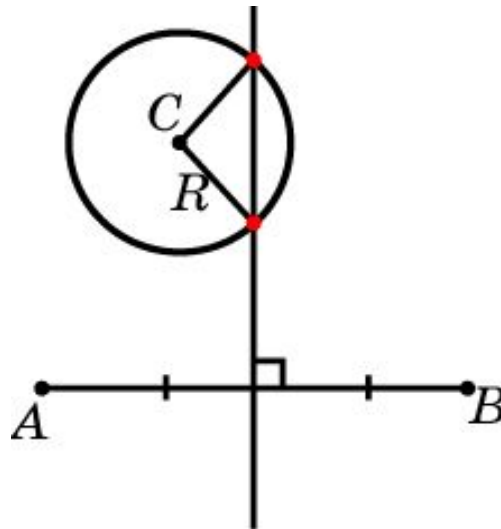
Ответ: Часть прямой c , лежащая внутри полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром к отрезку AB и точкой A . Если прямая c целиком лежит в полуплоскости, определяемой серединным перпендикуляром и точкой B , то таких точек нет.



Упражнение 13

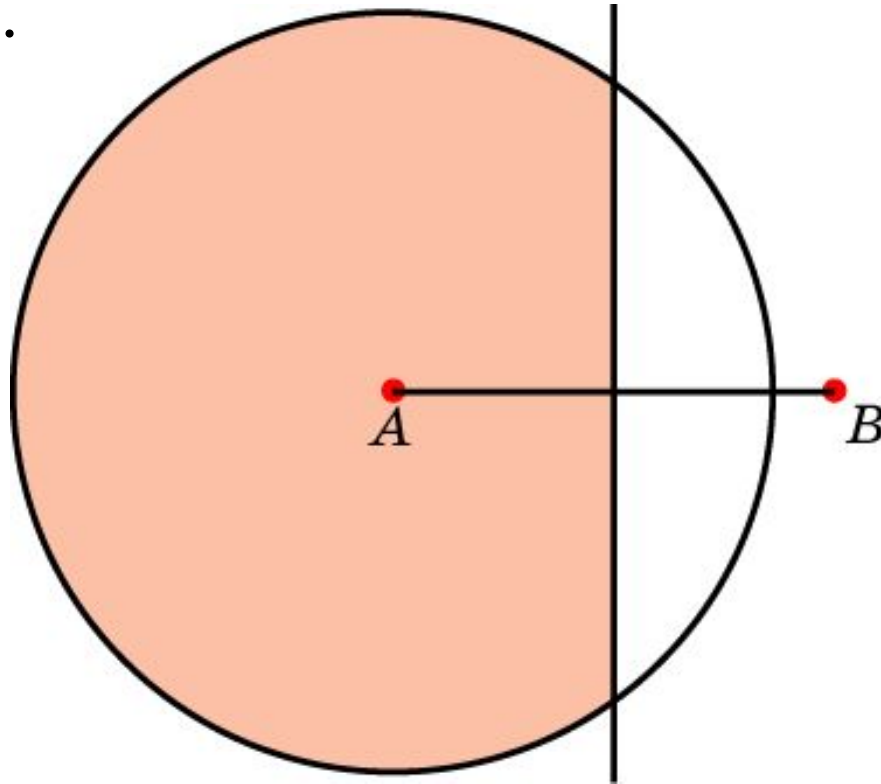
Даны три точки: A , B , C . Найдите точки, которые одинаково удалены от точек A и B и находятся на расстоянии R от точки C .

Ответ: Точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в точке C и радиусом R .



Упражнение 14

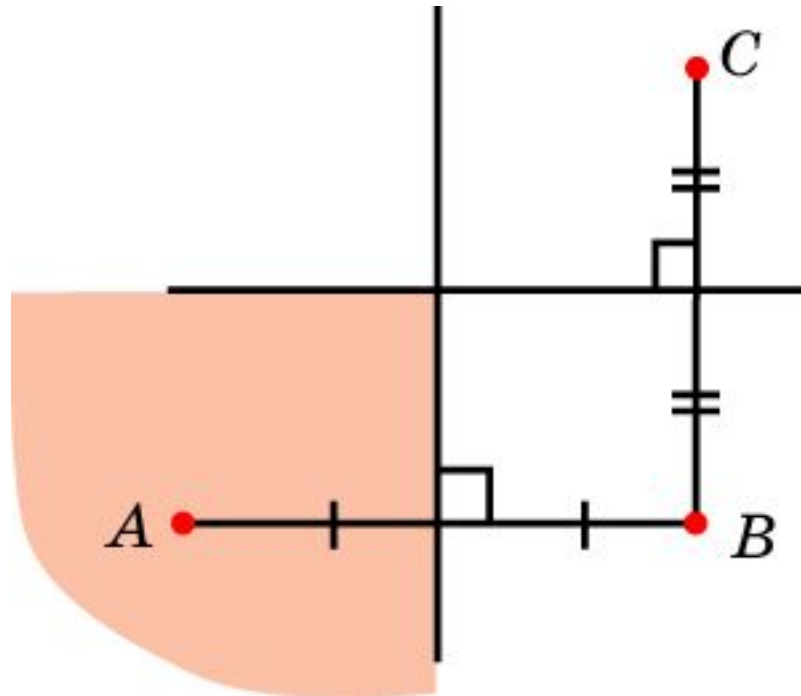
Даны две точки A и B . Найдите ГМТ C , для которых $CA \leq CB \leq AB$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением круга и полуплоскости.

Упражнение 15

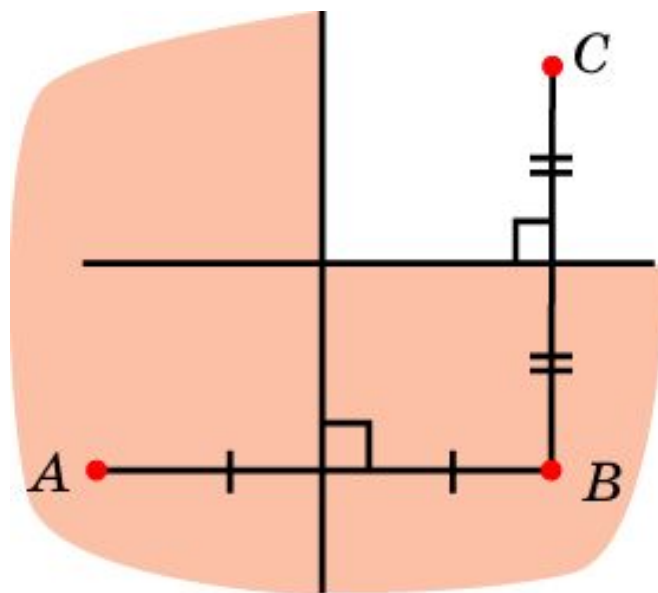
Даны три точки A , B , C . Найдите ГМТ X , для которых $AX = BX$ и $BX = CX$. Пересечением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является пересечением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам AB и BC .

Упражнение 16

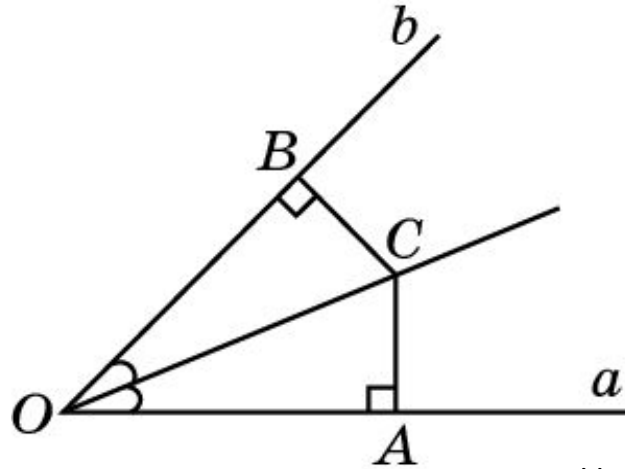
Даны три точки A , B , C . Найдите ГМТ X , для которых $AХ$ $BХ$ или $BХ$ $CХ$. Объединением каких фигур является искомое ГМТ.



Ответ: Искомое ГМТ является объединением двух полупространств, определяемых серединными перпендикулярами к отрезкам AB и BC .

Биссектриса угла

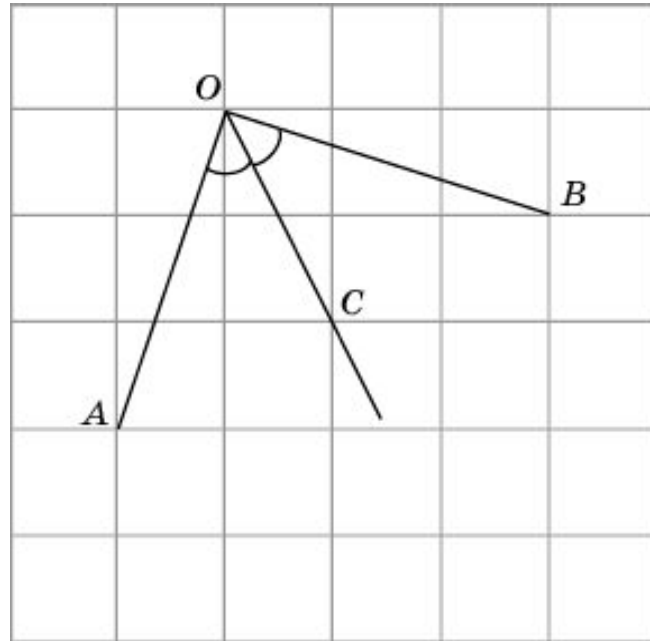
Теорема. Биссектриса угла является ГМТ, лежащих внутри этого угла и одинаково удаленных от его сторон.



Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной в точке O и сторонами a , b . Пусть точка C лежит внутри данного угла. Опустим из нее перпендикуляры CA и CB на стороны a и b . Если $CA = CB$, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, углы AOC и BOC равны. Значит, точка C принадлежит биссектрисе угла. Обратно, если точка C принадлежит биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники AOC и BOC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $CA = CB$. Значит, точка C одинаково удалена от сторон данного угла.

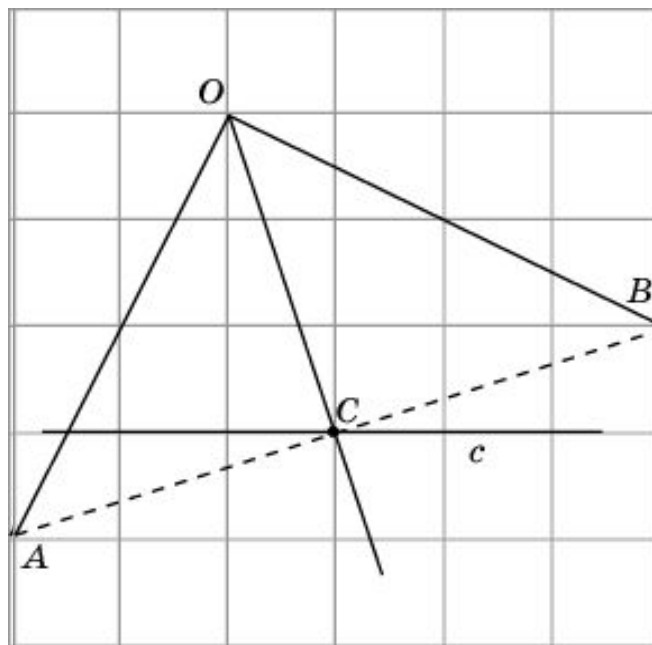
Упражнение 17

Постройте геометрическое место внутренних точек угла AOB , равноудаленных от его сторон.



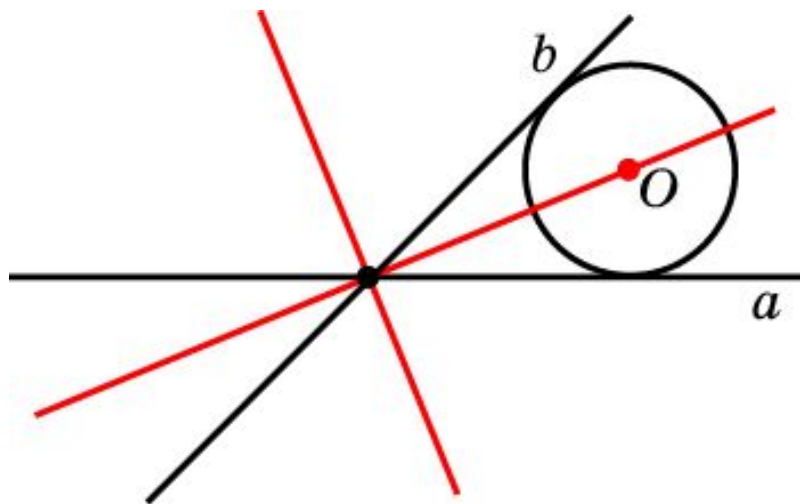
Упражнение 18

На прямой c отметьте точку C , равноудаленную от сторон угла AOB .



Упражнение 19

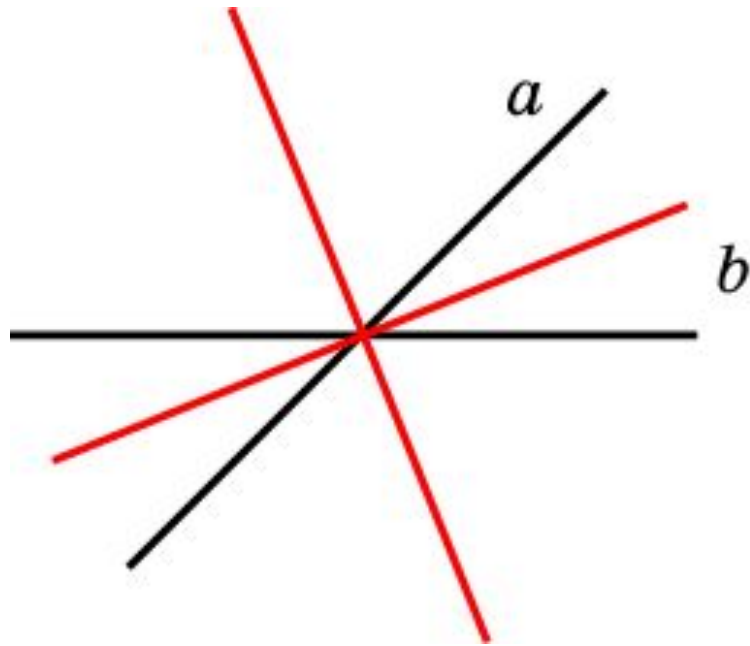
Что является геометрическим местом центров окружностей касающихся двух данных пересекающихся прямых?



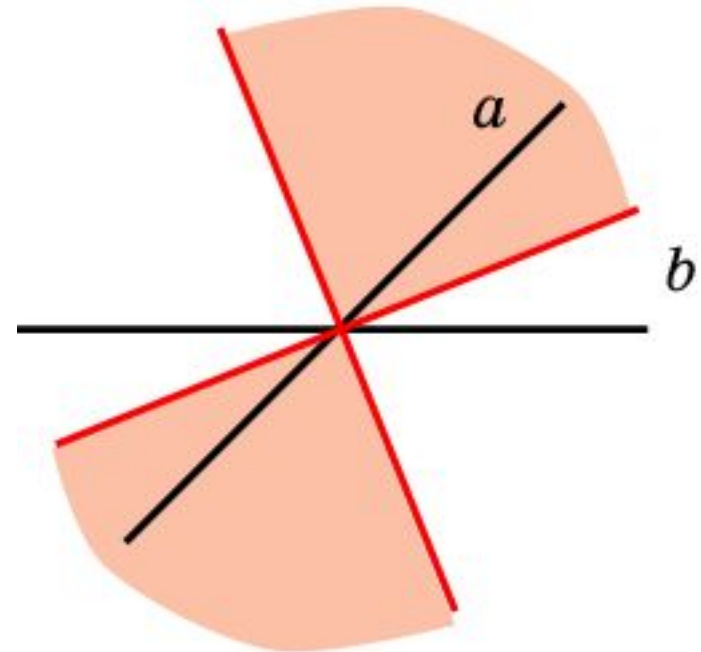
Ответ: Биссектрисы углов, образующихся при пересечении данных прямых, без точки пересечения этих прямых.

Упражнение 20

Пусть a и b - пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек: а) одинаково удаленных от a и b ; б) расположенных ближе к a , чем к b .



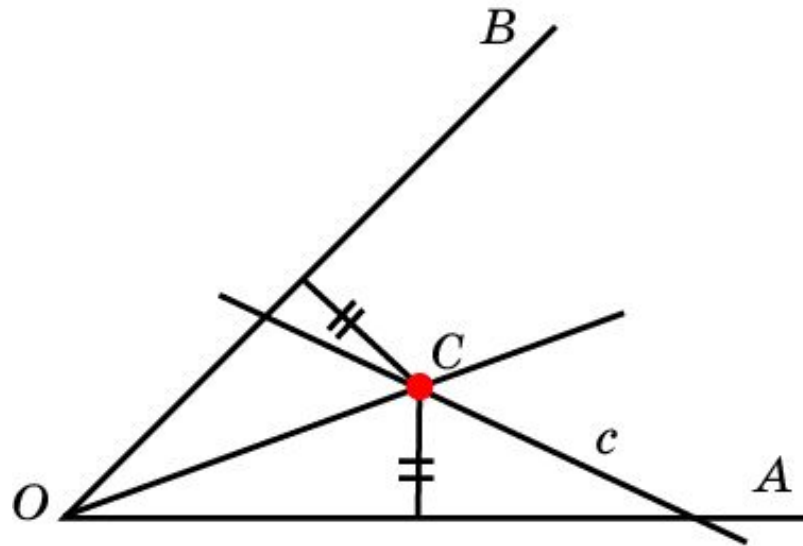
Ответ: а) Точки, принадлежащие биссектрисам четырех углов, образованных данными прямыми;



б) внутренности двух вертикальных углов, образованных биссектрисами.

Упражнение 21

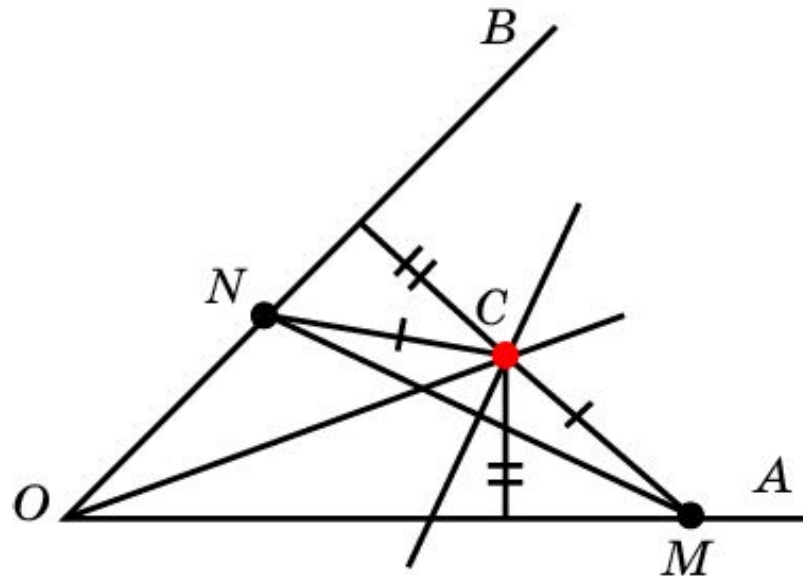
На прямой c , пересекающей стороны угла, найдите точку C , одинаково удаленную от этих сторон.



Ответ: Точка пересечения данной прямой c биссектрисой данного угла.

Упражнение 22

Дан угол AOB и точки M , N на его сторонах. Внутри угла найдите точку, одинаково удаленную от точек M и N и находящуюся на одинаковом расстоянии от сторон угла.



Ответ: Точка пересечения серединного перпендикуляра к MN с биссектрисой угла.