

Тема 5. Вступ до математичного аналізу

**Лекція №11.
Неперервність функції.
Визначні границі.**

A close-up photograph of a dandelion seed head. The brown, cylindrical seed head is positioned in the upper center of the frame. From its base, a multitude of fine, white, feathery pappi are blowing outwards and downwards, creating a sense of motion. The background is a clear, bright blue sky, which provides a high contrast for the white seeds.

План

- Неперервність функції у точці.
- Точки розриву та їх класифікація
- Визначні границі
- Еквівалентні величини

Означення 1.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо:

- 1) ця функція визначена в точці x_1 і в деякому околі точки x_1 ;
- 2) границя функції при $x \rightarrow x_1$ дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1).$$

Означення 2.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_1$, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Означення

Функція $y = f(x)$ називається
неперервною в точці $x = x_1$ справа (зліва),
якщо:

1) $f(x)$ визначена в деякому правому
(лівому) напівколі точки x_1

$[x_1; x_1 + \delta)$ ($(x_1 - \delta, x_1]$);

2) $\lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x) = f(x_1)$ ($\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) = f(x_1)$).

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в інтервалі (a, b) , якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу, і крім того, в точці $x = a$ неперервна справа, а в точці $x = b$ - неперервна зліва.

Теорема

Всяка елементарна функція неперервна на тій множині, де вона визначена.

Правило обчислення границь

Щоб обчислити границю в точці $x = x_1$ функції, неперервної в цій точці, треба в функцію, що стоїть під знаком границі, замість аргументу x підставити його граничне значення x_1 .

I теорема Вейерштрасса

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна в замкненому проміжку $[a, b]$, то вона обмежена, тобто існують такі сталі і скінченні числа m і M , що

$$m \leq f(x) \leq M \text{ при } a \leq x \leq b.$$

II теорема Вейерштрасса

Якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку знайдеться хоч би одна точка $x = x_1$ така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню

$$f(x_1) \geq f(x)$$

(де x - будь-яка інша точка відрізка), і знайдеться хоч би одна точка x_2 така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню

$$f(x_2) \leq f(x).$$

Теорема (про проміжне значення)

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо на кінцях цього відрізка функція приймає нерівні значення $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то яким би не було число μ , що міститься між числами A і B , знайдеться така точка $x = c$, яка міститься між a і b , що $f(c) = \mu$.

Означення.

Точка, в якій порушується хоча б одна з умов неперервності функції, називається точкою розриву, а сама функція називається розривною в цій точці.

Точки розриву

```
graph TD; A[Точки розриву] --> B[Першого роду<br/>(односторонні границі<br/>існують і скінченні)]; A --> C[Другого роду<br/>(хоч би одна з<br/>односторонніх<br/>границь не існує або<br/>дорівнює нескінченності)]; B --> D[Усувні<br/>(односторонні границі<br/>рівні)]; B --> E[Стрибок<br/>(односторонні границі<br/>нерівні)];
```

Першого роду

*(односторонні границі
існують і скінченні)*

Другого роду

*(хоч би одна з
односторонніх
границь не існує або
дорівнює нескінченності)*

Усувні

*(односторонні границі
рівні)*

Стрибок

*(односторонні границі
нерівні)*

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

градусний вимір X	радіанний вимір x	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10^0	0,1745	0,1736	0,9948
5^0	0,0873	0,0872	0,9988
2^0	0,0349	0,0349	1,0
1^0	0,0175	0,0175	1,0

Перша визначна границя

Границя відношення синуса
нескінченно малої дуги до самої
дуги, вираженої в радіанах,
дорівнює 1, тобто

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

x	1	2	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,594	2,705	2,717	2,718

Друга визначна границя

Границя функції $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ як
При $x \rightarrow \infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$ дорівнює
числу e , тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Дві нескінченно малі функції α і β називаються *нескінченно малими одного порядку* в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\beta}{\alpha} = g, \quad g \in R, \quad g \neq 0.$$

Нескінченно мала функція β називається нескінченно малою вищого порядку в порівнянні з нескінченно малою функцією α в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 0.$$

Нескінченно мала функція β називається **нескінченно малою нижчого порядку** в порівнянні з нескінченно малою функцією α в околі точки $x = x_1$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\beta}{\alpha} = \infty.$$

Дві нескінченно малі функції в околі точки $x = x_1$ α і β називаються **еквівалентними** (рівносильними), якщо границя їх відношення в цій точці дорівнює 1, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

таблиця еквівалентних нескінченно малих

якщо $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$, то

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$
$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$	

Теорема.

Границя відношення двох нескінченно малих функцій в точці $x = x_1$ дорівнює границі відношення двох еквівалентних до них функцій в точці $x = x_1$

Наслідки першої визначної границі

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Наслідки другої визначної границі

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x/\ln a} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1$$

Завдання на самопідготовку

- Шумко Л.І. , Шумко Л.Г.
Вища математика, курс лекцій, 2005. .