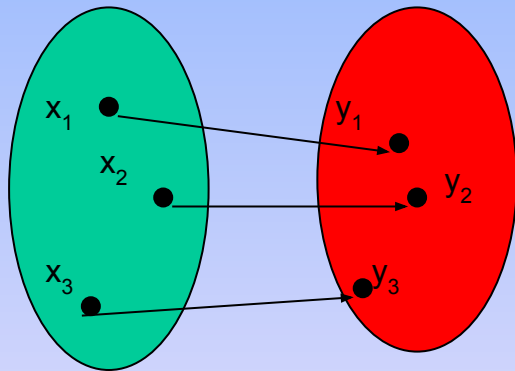


ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Лекція 1.1

Визначення функції

X



- Якщо кожному елементу x з множини X по визначеному закону чи правилу ставиться у відповідність один і тільки один елемент y з множини Y , то говорять що на множині X задана функція $y=f(x)$.
- Змінна x називається незалежною змінною або аргументом,
- y — залежною, або значенням функції.

Способи задання функції

- *Табличний спосіб.*
- *Графічний спосіб .*
- *Аналітичний спосіб задання функції (за допомогою формули). У загальному вигляді: $y = f(x)$*
Наприклад:

- - степенева функція $y = x^n$, ;
- - лінійна функція $y = ax + b$;
- - показникова функція $y = a^x$;
- - логарифмічна функція $y = \log_a x$;
- - тригонометричні функції:

$$y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{ctg} x$$

Властивості функцій

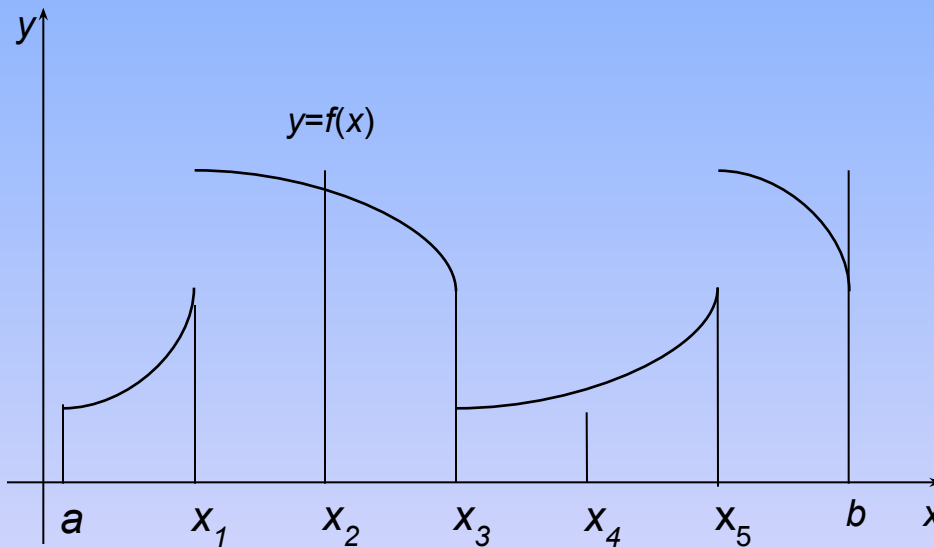
1. Множина усіх значень X називається **областю визначення** функції $D(f)$, а множина значень Y , називають **множиною значень функції** $E(f)$.
2. Функція, називається **парною**, якщо для будь-якого значення аргументу x з області визначення функції виконується рівність:

Функція, називається **непарною**, якщо для будь-якого значення x з області визначення функції виконується рівність:

3. Функція називається **монотонно зростаючою** на всій області визначення (чи на інтервалах), якщо для будь-якого значення x з області визначення функції (чи з інтервалу) виконується нерівність

Якщо за тих же умов виконується нерівність: $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2))$
тоді функція називається **монотонно спадною**. $(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$

Властивості функцій



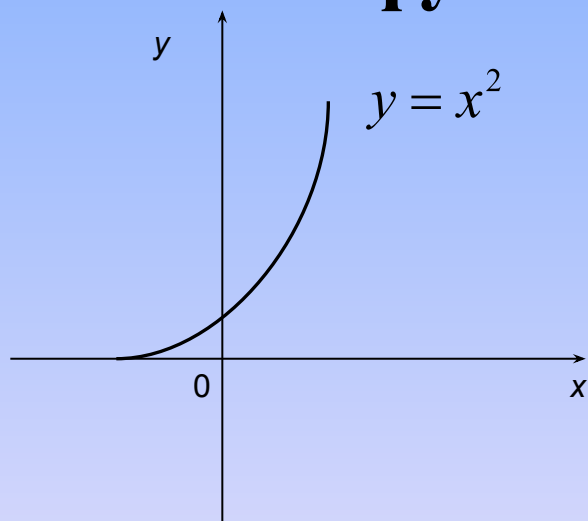
На інтервалах $]a; x_2[,]x_4; b[$ функція $y=f(x)$ зростає, на інтервалі $]x_2; x_4[$ спадає;

в точках $x = x_2$ - максимум, $x = x_4$ - мінімум;

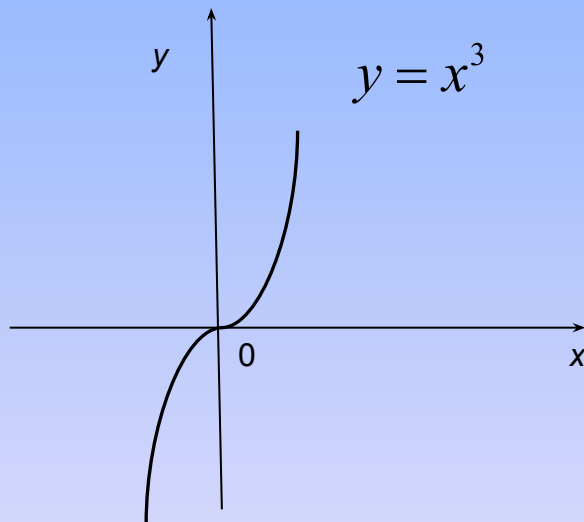
точки $x = x_1, x = x_3, x = x_5$ - точки перегину.

Елементарні функції

Степенева функція $y = x^n$



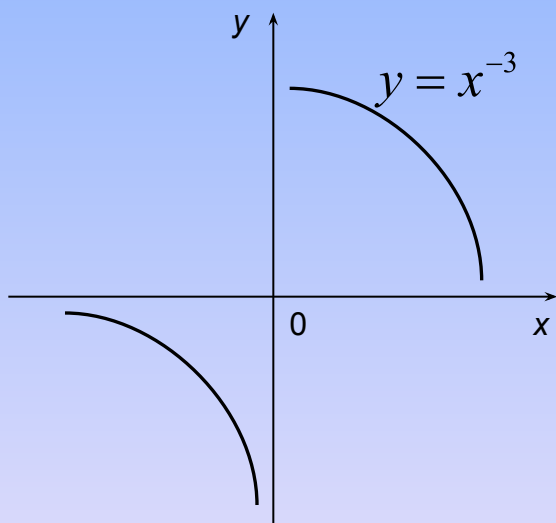
Степенева функція $y = x^n$,
де n – парне натуральне
число.



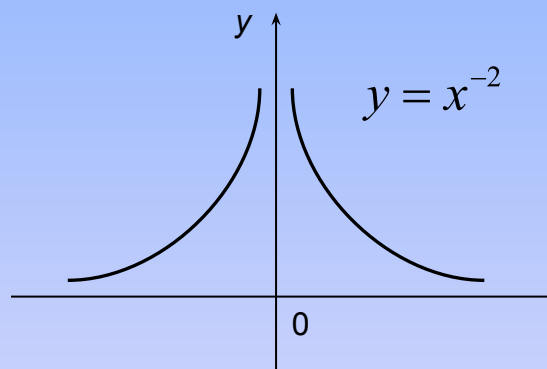
Степенева функція $y = x^n$,
де n – непарне натуральне
число.

Елементарні функції

Степенева функція: $y = x^n$



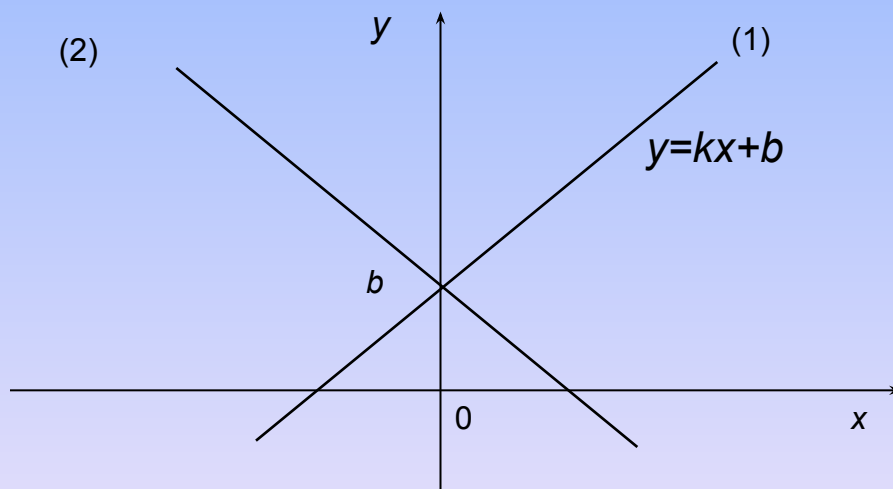
Степенева функція $y = x^n$,
де $n = -(2k+1)$,



Степенева функція $y = x^n$,
де $n = -2k$

Елементарні функції

Лінійна функція: $y = kx + b$, де k і b -
будь-які постійні числа.

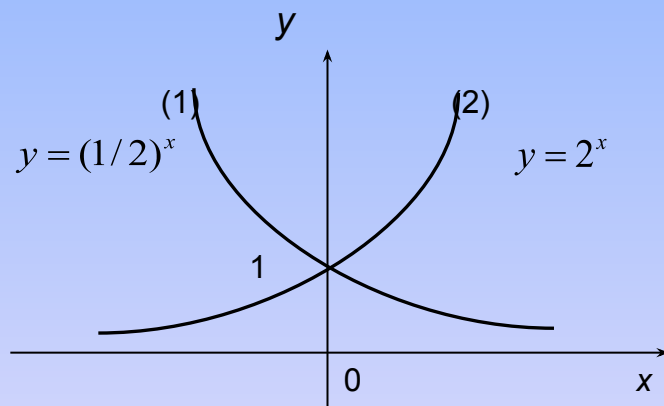


Графік функції $y = kx + b$ перетинає вісь Ox в точці $x = -b/k$, вісь Oy в точці $y = b$.

Два випадки: (1) $k > 0$; (2) $k < 0$.

Елементарні функції

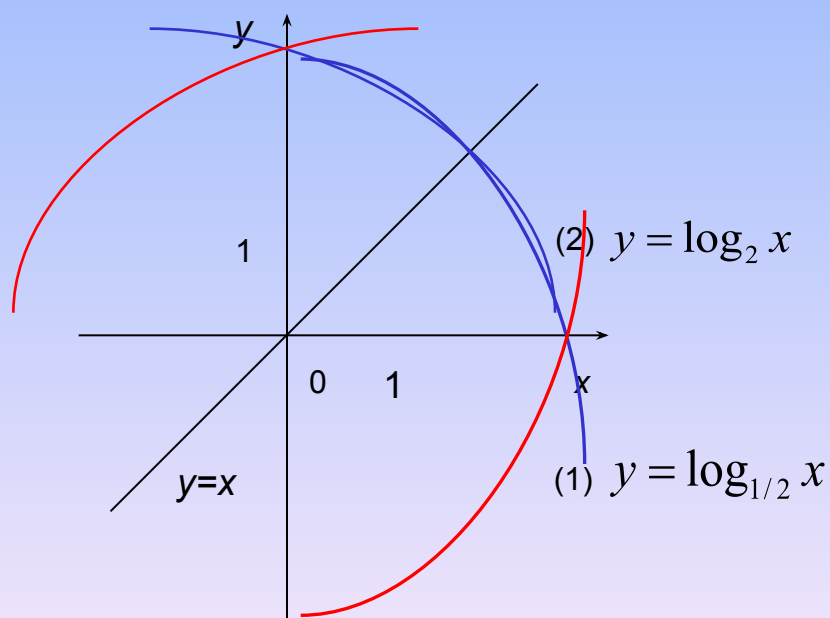
Показникова функція: $y = a^x$, де a - додатне
стале число, відмінне від одиниці .



Графік функції $y = a^x$.
Випадки: (1) $0 < a < 1$, (2) $a > 1$.

Елементарні функції

Логарифмічна функція: $y = \log_a x$, де a - додатне стале число.



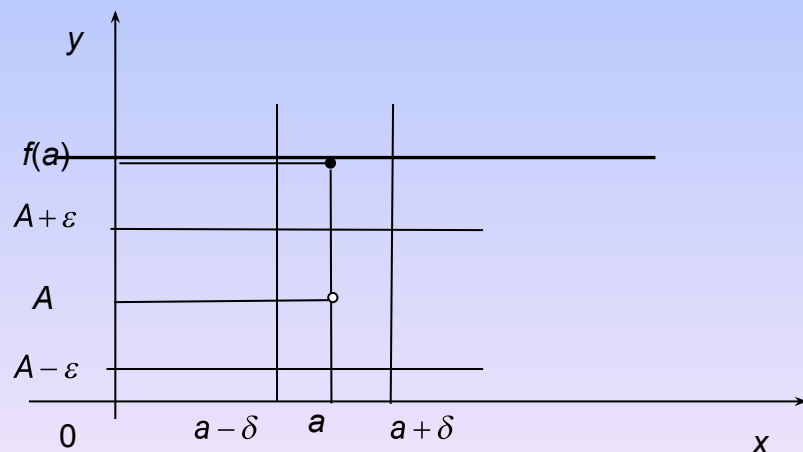
Графіки функції $y = \log_a x$
(1) $0 < a < 1$, (2) $a > 1$.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x , що прямує до a ($x \rightarrow a$), якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке мале число $\delta > 0$, що для всіх x , які задовольняють умову $|x - a| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

- Границю функції записують у вигляді:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Графічне зображення значення функції $f(a)$ та границі функції A в точці a .

Теоремаи про границі функції

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,71828....$$

Приклади визначення границі функції

№1

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{6^2 - 8 \cdot 6 + 12}{6^2 - 7 \cdot 6 + 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(x-2)}{(x-6)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-2}{x-1} = \frac{6-2}{6-1} = \frac{4}{5}$$

№2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 5}{3x^2 + 2x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2})}{x^2(3 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2}}{3 + \frac{2}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}} = \frac{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{5}{\infty^2}}{3 + \frac{2}{\infty} + \frac{6}{\infty^2}} = \frac{1}{3}$$

№3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x \cos x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$