

# Прямой чистый изгиб

## Поперечный плоский изгиб

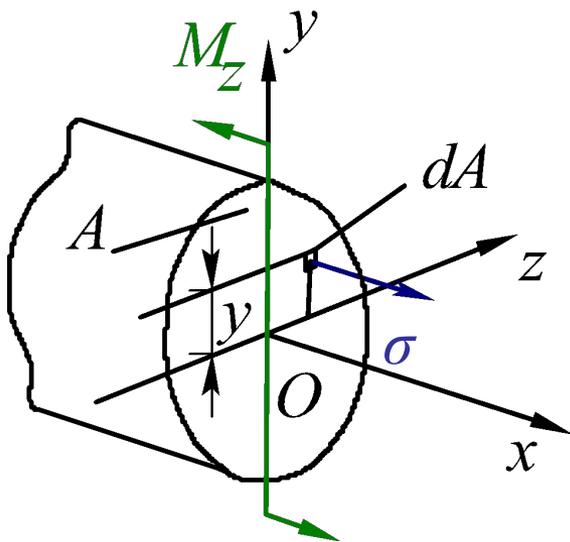
Доцент кафедры  
самолетостроения  
к.т.н Мухин Д.В.

# 1. Прямой чистый изгиб

Поперечный изгиб - деформация стержня силами, перпендикулярными оси (поперечными) и парами, плоскости действия которых перпендикулярны нормальным сечениям.

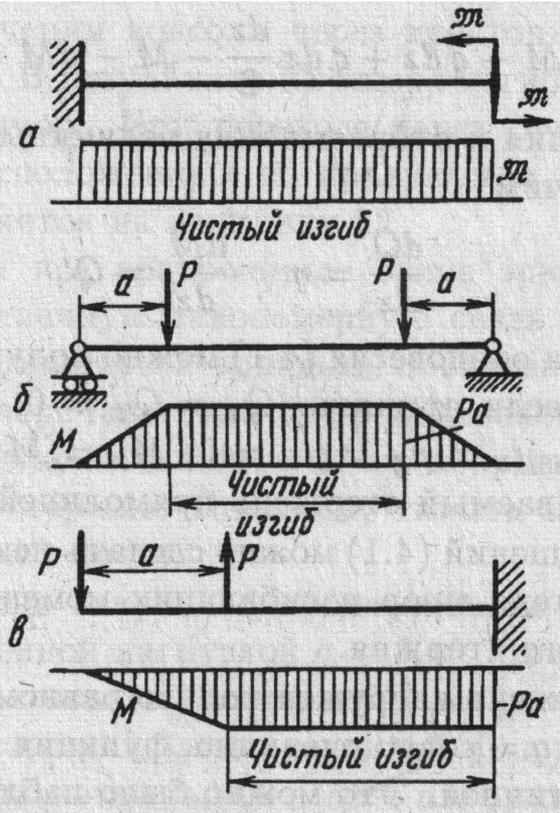
Стержень работающий на изгиб называют **балкой**.

При **прямом чистом изгибе** в поперечном сечении стержня возникает только один силовой фактор — изгибающий момент  $M_z$ . Так как  $Q_y = dM_z/dx = 0$ , то  $M_z = \text{const}$  и чистый прямой изгиб может быть реализован при нагружении стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях стержня.



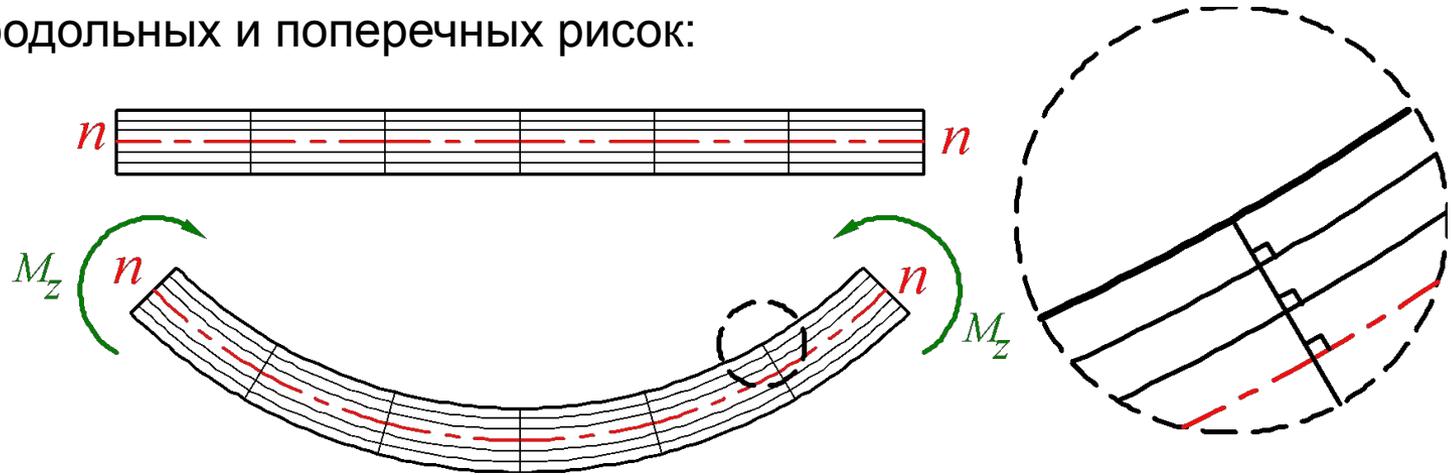
Поскольку изгибающий момент  $M_z$  по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно оси  $Oz$  с нормальными напряжениями его связывает вытекающее из этого определения уравнение статики:

$$M_z = \int_A \sigma y dA$$



# Анализ напряженного состояния при чистом изгибе

Проанализируем деформации модели стержня на боковой поверхности которого нанесена сетка продольных и поперечных рисок:



Поскольку поперечные риски при изгибе стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях, остаются прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным рискам, это позволяет сделать вывод о выполнении **гипотезы плоских сечений**, а следовательно  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

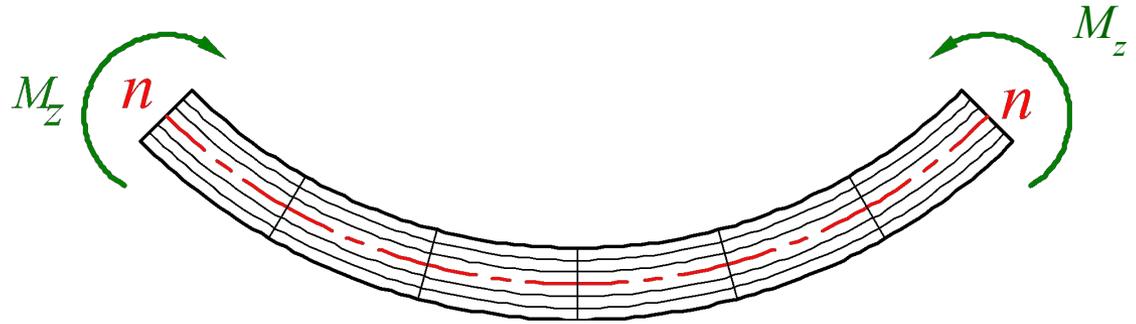
Замеряя изменение расстояний между продольными рисками, приходим к выводу о справедливости **гипотезы о ненадавливании продольных волокон**, то есть

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

То есть из всех компонентов тензора напряжений при чистом изгибе не равно нулю только напряжение  $\sigma_x = \sigma$  и чистый прямой изгиб призматического стержня сводится к одноосному растяжению или сжатию продольных волокон напряжениями  $\sigma$ . При этом часть волокон находится в зоне растяжения (на рис. это—нижние волокна), а другая часть—в зоне сжатия (верхние волокна). Эти зоны разделены **нейтральным слоем** ( $n-n$ ), не меняющим своей длины, напряжения в котором равны нулю.

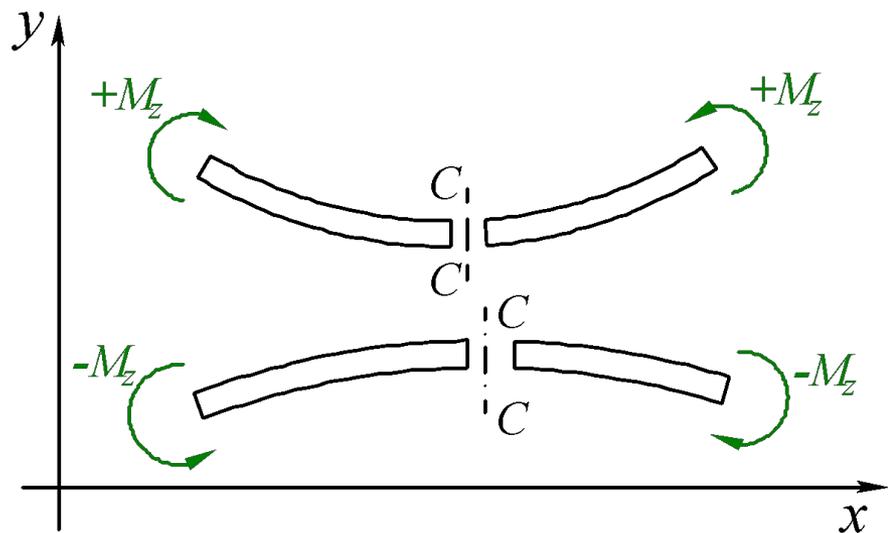
# Правило знаков изгибающих моментов

Правила знаков моментов в задачах теоретической механики и сопротивления материалов не совпадают. Причина этого в различии рассматриваемых процессов. В теоретической механике рассматриваемым процессом является движение или равновесие твердых тел, поэтому два момента на рисунке стремящиеся повернуть стержень в разные стороны (правый момент по часовой стрелке, а левый – против) имеют в задачах теоретической механики разный знак.



В задачах сопромата рассматриваются возникающие в теле напряжения и деформации. С этой точки зрения оба момента вызывают в верхних волокнах напряжения сжатия, а в нижних напряжения растяжения, поэтому моменты имеют одинаковый знак.

Правила знаков изгибающих моментов относительно сечения С-С представлены на схеме:

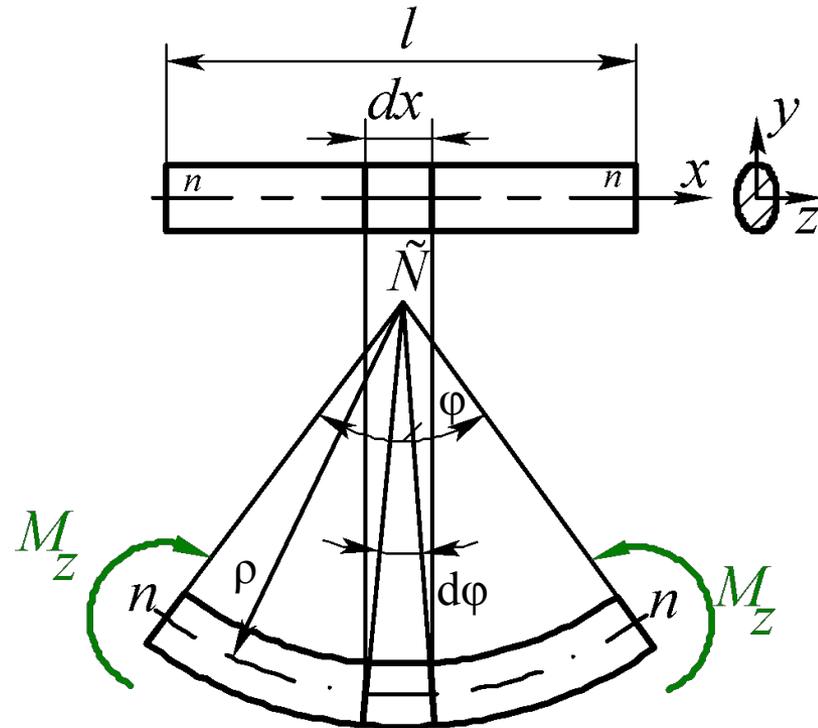


# Расчет значений напряжений при чистом изгибе

Выведем формулы для расчета радиуса кривизны нейтрального слоя и нормальных напряжений в стержне.

Рассмотрим призматический стержень в условиях прямого чистого изгиба с поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси  $Oy$ . Ось  $Ox$  поместим на нейтральном слое, положение которого заранее неизвестно. Отметим, что постоянство поперечного сечения призматического стержня и изгибающего момента ( $M_z = const$ ), обеспечивает постоянство радиуса кривизны нейтрального слоя по длине стержня.

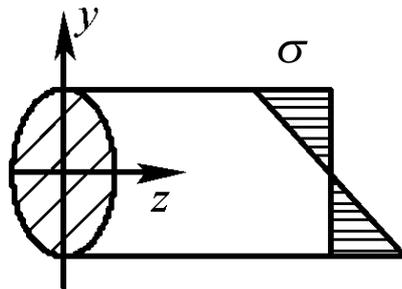
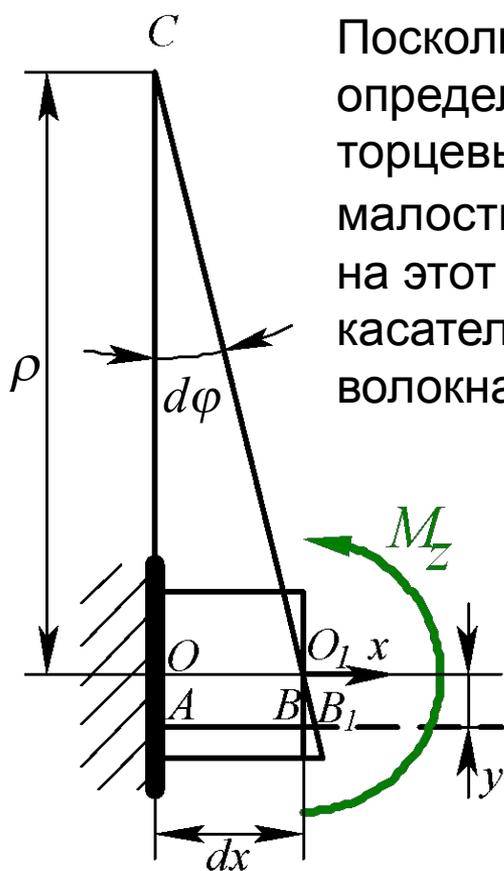
При изгибе с постоянной кривизной нейтральный слой стержня становится дугой окружности, ограниченной углом  $\varphi$ . Рассмотрим вырезанный из стержня бесконечно малый элемент длиной  $dx$ . При изгибе он превратится в бесконечно малый элемент дуги, ограниченный бесконечно малым углом  $d\varphi$ .



С учетом зависимостей между радиусом окружности, углом и длиной дуги:

$$l = \rho \cdot \varphi; \quad dx = \rho \cdot d\varphi.$$

Поскольку интерес представляют деформации элемента, определяемые относительным смещением его точек, одно из торцевых сечений элемента можно считать неподвижным. Ввиду малости  $d\varphi$  считаем, что точки поперечного сечения при повороте на этот угол перемещаются не по дугам, а по соответствующим касательным. Вычислим относительную деформацию продольного волокна  $AB$ , отстоящего от нейтрального слоя на  $y$ :



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{BB_1}{AB} = \frac{BB_1}{OO_1}$$

Из подобия треугольников  $COO_1$  и  $O_1BB_1$  следует, что

$$BB_1/OO_1 = O_1B/CO = y/\rho$$

то есть:  $\varepsilon = y/\rho$

Продольная деформация оказалась линейной функцией расстояния от нейтрального слоя, что является прямым следствием закона плоских сечений.

Тогда нормальное напряжение, растягивающее волокно  $AB$ , на основании закона Гука будет равно:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

Полученная формула не пригодна для практического использования, так как содержит две неизвестные: кривизну нейтрального слоя  $1/\rho$  и положение нейтральной оси  $Ox$ , от которой отсчитывается координата  $y$ . Для определения этих неизвестных воспользуемся уравнениями равновесия статики. Первое выражает требование равенства нулю продольной силы

$$N_x = \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $\sigma$ :  $N_x = \int_A E \cdot \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0$

и учитывая, что  $E/\rho \neq 0$ , получаем, что:

$$\int_A y \cdot dA = 0$$

Интеграл в левой части этого уравнения представляет собой статический момент поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси  $Ox$ , который может быть равным нулю только относительно центральной оси (оси проходящей через центр тяжести сечения). Поэтому нейтральная ось  $Ox$  проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Вторым уравнением равновесия статики является, связывающее нормальные напряжения с изгибающим моментом. Подставляя в это уравнение выражение для напряжений, получим:

$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA$$

Интеграл в полученном уравнении ранее изучен:  $\int_A y^2 dA = J_z$

$J_z$  — момент инерции относительно оси Oz. В соответствии с выбранным положением осей координат он же главный центральный момент инерции сечения.

Получаем формулу для кривизны нейтрального слоя:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}$

Кривизна нейтрального слоя  $1/\rho$  является мерой деформации стержня при прямом чистом изгибе. Кривизна тем меньше, чем больше величина  $EJ_z$ , называемая **жесткостью поперечного сечения при изгибе**.

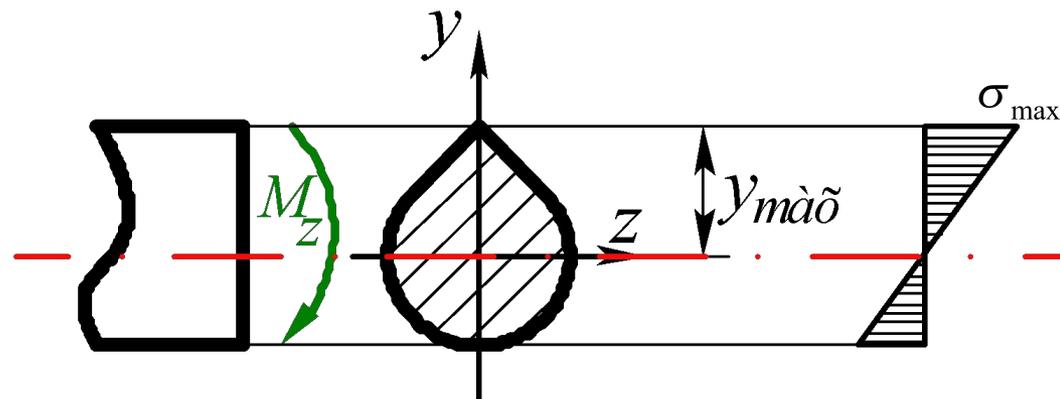
Подставляя выражение в формулу для  $\sigma$ , получаем:  $\sigma = -\frac{M_z}{J_z} y$

Таким образом, **нормальные напряжения при чистом изгибе призматического стержня являются линейной функцией координаты  $y$  и достигают наибольших значений в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси.**

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$$

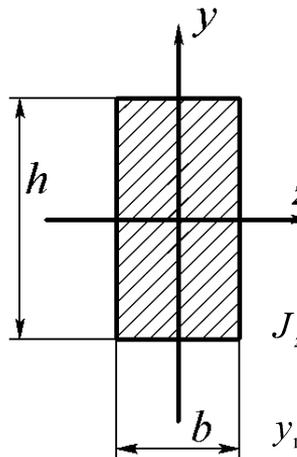
геометрическая характеристика,

$W_z = J_z / y_{\max}$  имеющая размерность  $\text{м}^3$  называется **моментом сопротивления при изгибе**.



# Определение моментов сопротивления $W_z$ поперечных сечений

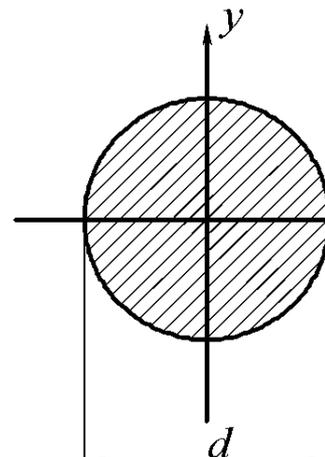
- У простейших фигур в справочнике (лекция 4) или рассчитать самостоятельно



$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$y_{\max} = \frac{h}{2}$$

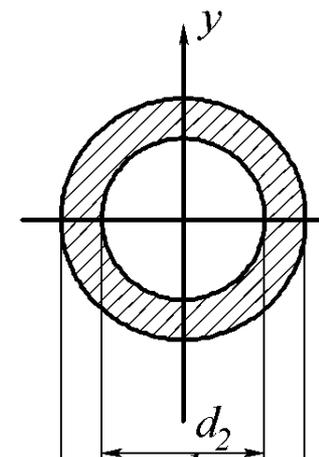
$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}$$



$$J_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$y_{\max} = \frac{d}{2}$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\pi d^3}{32}$$



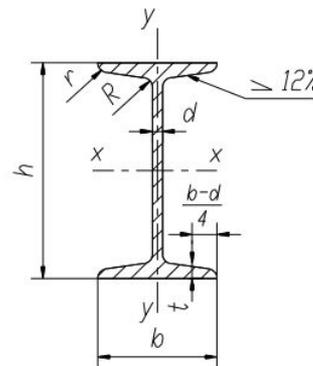
$$J_z = \frac{\pi d_1^4}{64} (1 - c^4)$$

$$c = \frac{d_2}{d_1}; y_{\max} = \frac{d_1}{2}$$

$$W_z = \frac{\pi d_1^3}{32} (1 - c^4)$$

- У стандартных профилей в сортаменте ГОСТ

## СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



Балки двутавровые (по ГОСТ 8239 – 72)

Обозначения:

$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;

$J$  – момент инерции;  
 $W$  – момент сопротивления;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $S$  – статический момент полусечения.

№ профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_{x_3}, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_{x_3}, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_{y_3}, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5

# Расчет на прочность при чистом изгибе

## Проектировочный расчет

Условие прочности при расчете чистого изгиба будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

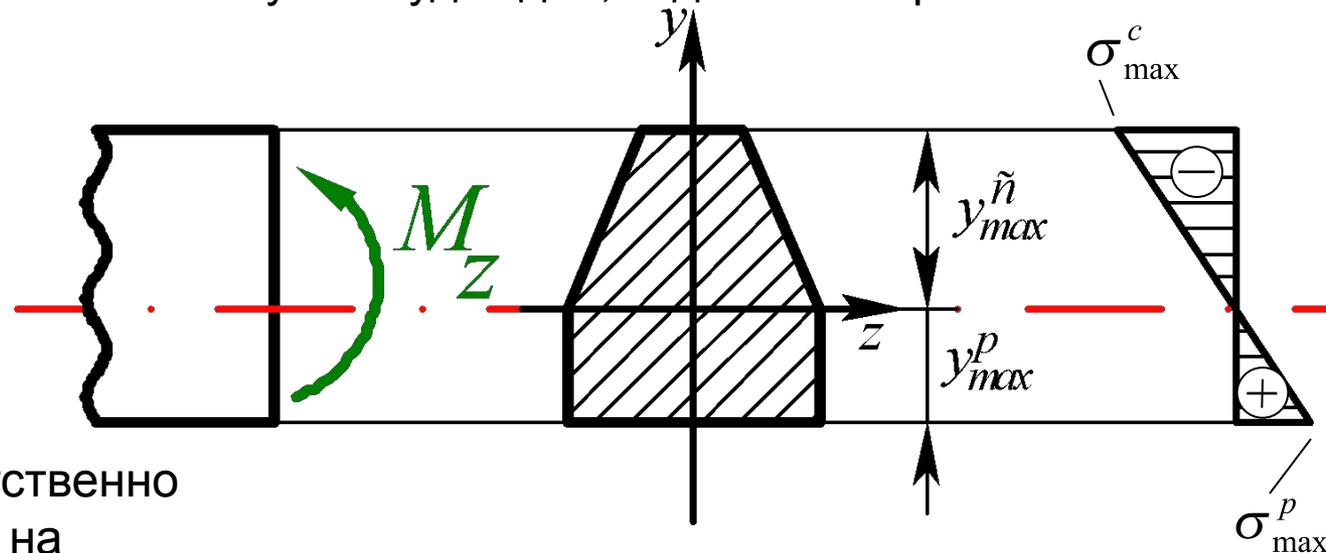
Из данного условия определяют  $W_z$ , а далее либо подбирают нужный профиль из сортамента стандартного проката, либо по геометрическим зависимостям рассчитывают размеры сечения.

При расчете балок из хрупких материалов следует различать наибольшие растягивающие  $\sigma_{\max}^p$  и наибольшие сжимающие  $\sigma_{\max}^c$  напряжения, которые сравниваются соответственно с допускаемыми напряжениями на растяжение и сжатие. Условий прочности в этом случае будет два, отдельно по растяжению и по сжатию:

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^p \leq [\sigma]_p$$

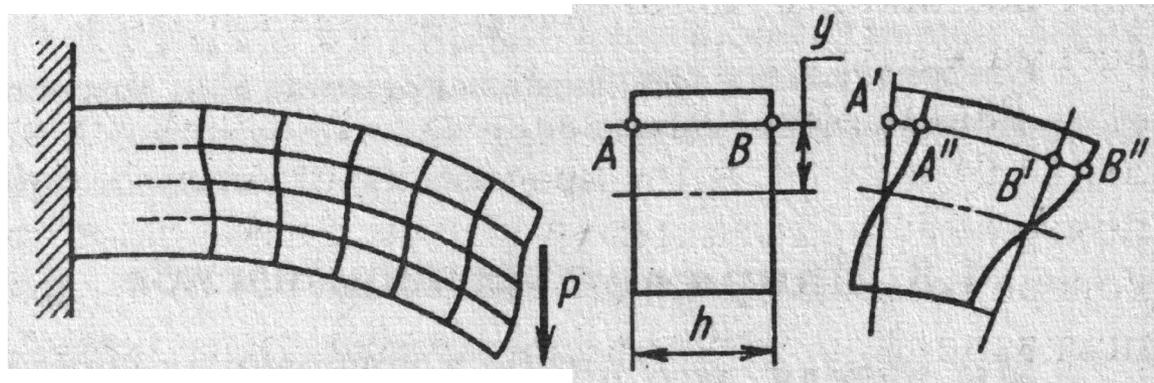
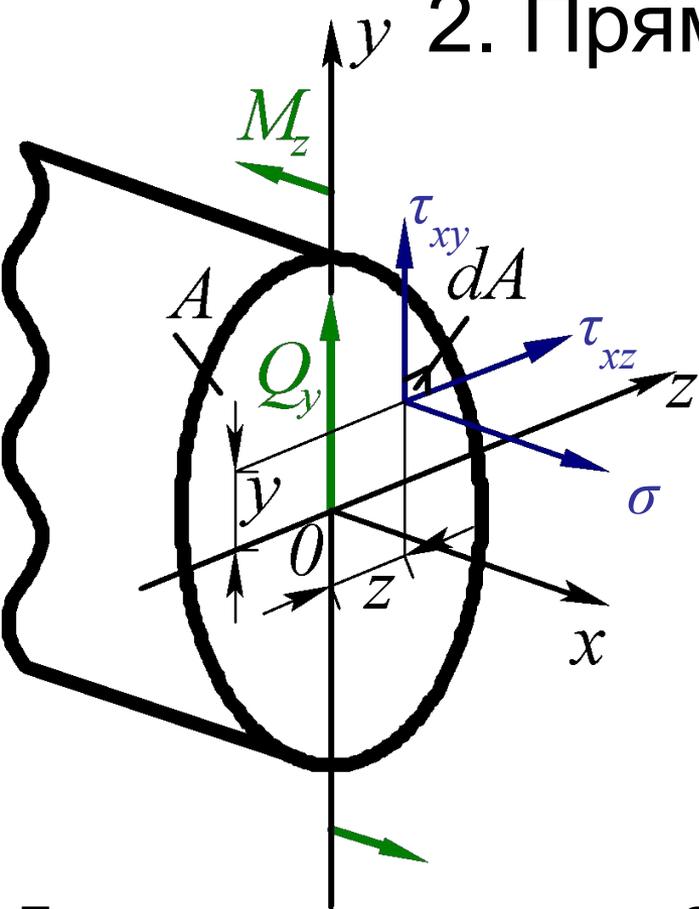
$$|\sigma_{\max}^c| = \left| \frac{M_z}{J_z} y_{\max}^c \right| \leq [\sigma]_c$$

Здесь  $[\sigma]_p, [\sigma]_c$  - соответственно допускаемые напряжения на растяжение и на сжатие.





## 2. Прямой поперечный изгиб



Выведенная в случае чистого изгиба стержня формула для расчета нормальных напряжений в случае прямого поперечного изгиба, строго говоря, неприменима, поскольку из-за сдвигов, вызываемых касательными напряжениями, происходит депланация (искривление) поперечных сечений, то есть нарушается гипотеза плоских сечений. Однако для балок с высотой сечения  $h < l/4$  погрешность невелика и ее применяют для определения нормальных напряжений поперечного изгиба как приближенную.

При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает изгибающий момент  $M_z$  и поперечная сила  $Q_y$ , которые связаны с нормальными и касательными напряжениями

$$M_z = \int_A \sigma y dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

При выводе условия прочности при чистом изгибе использовалась гипотеза об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон. При поперечном изгибе наблюдаются отклонения от этой гипотезы:

а) в местах приложения сосредоточенных сил. Под сосредоточенной силой напряжения поперечного взаимодействия  $\sigma_y$  могут быть достаточно велики и во много раз превышать продольные напряжения, убывая при этом, в соответствии с принципом Сен-Венана,

по мере удаления от точки приложения силы;

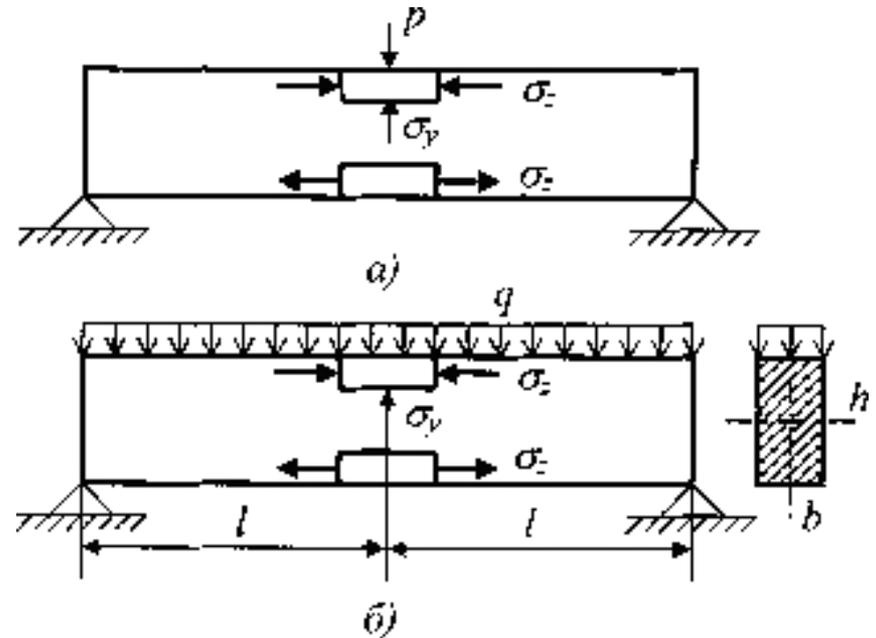
б) в местах приложения распределенных нагрузок. Так, в случае, приведенном на рис, напряжения от давления на верхние волокна балки.

$$\sigma_y = -\frac{q}{b}$$

Сравнивая их с продольными напряжениями  $\sigma_x$ , имеющими порядок:

$$\sigma_{x \max} = \frac{ql^2/8}{bh^2/6} = \frac{3}{4} \frac{q}{b} \left( \frac{l}{h} \right)^2$$

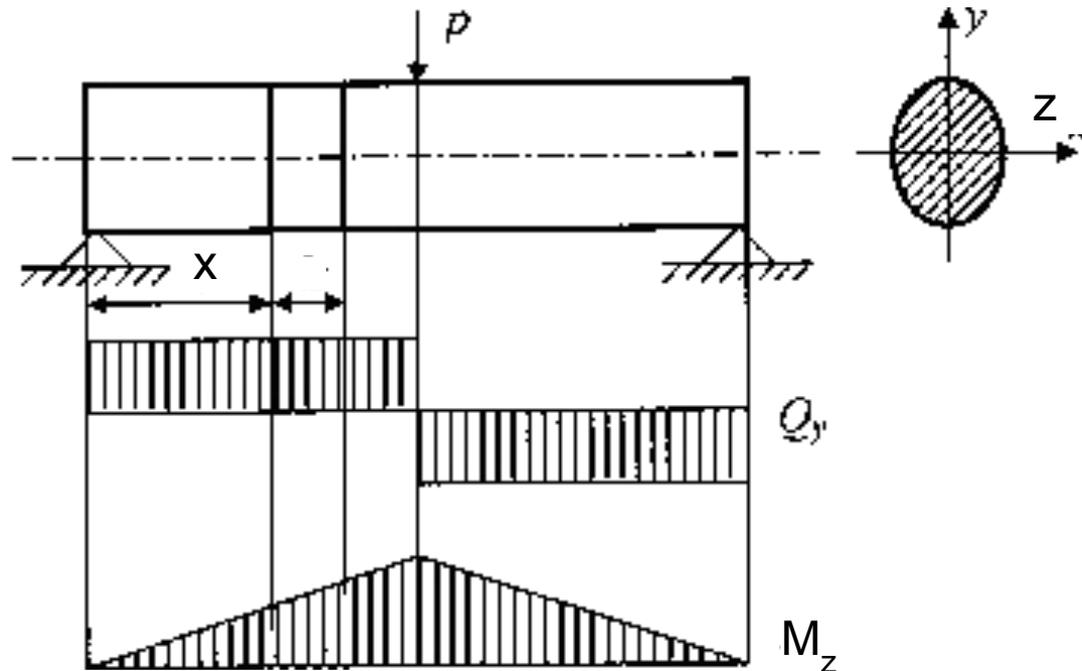
приходим к выводу, что напряжения  $\sigma_y \ll \sigma_x$  при условии, что  $h^2 \ll l^2$



# Расчет касательных напряжений при прямом поперечном изгибе

Примем, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения.

Непосредственное определение напряжений  $\tau_{yx}$  затруднительно, поэтому находим равные им касательные напряжения  $\tau_{xy}$  возникающие на продольной площадке с координатой  $y$  элемента длиной  $dx$ , вырезанного из балки



От этого элемента продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на  $y$ , отсекаем верхнюю часть, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями  $\tau$ . Нормальные напряжения  $\sigma$  и  $\sigma + d\sigma$ , действующие на торцевых площадках элемента, также заменим их равнодействующими

$$N_\omega = \int_\omega \sigma dA = \int_\omega \frac{M_z}{I_z} y dA = \frac{M_z}{I_z} S_z^\omega$$

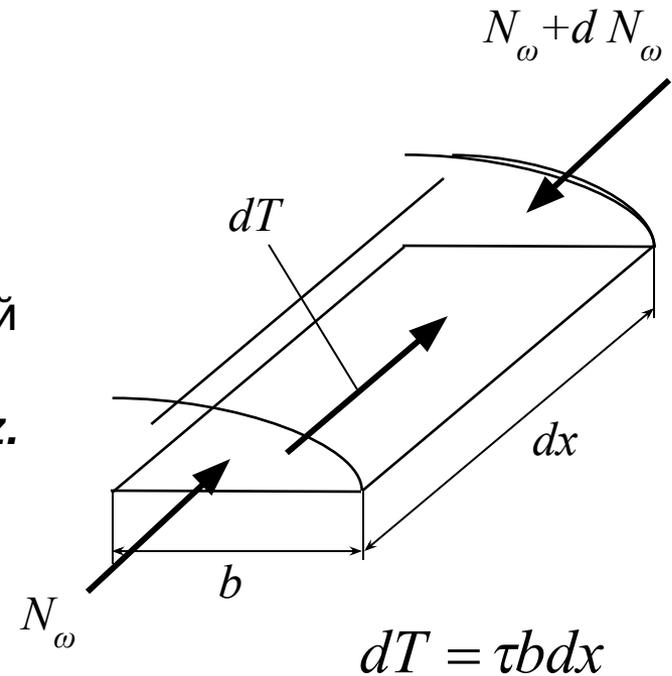
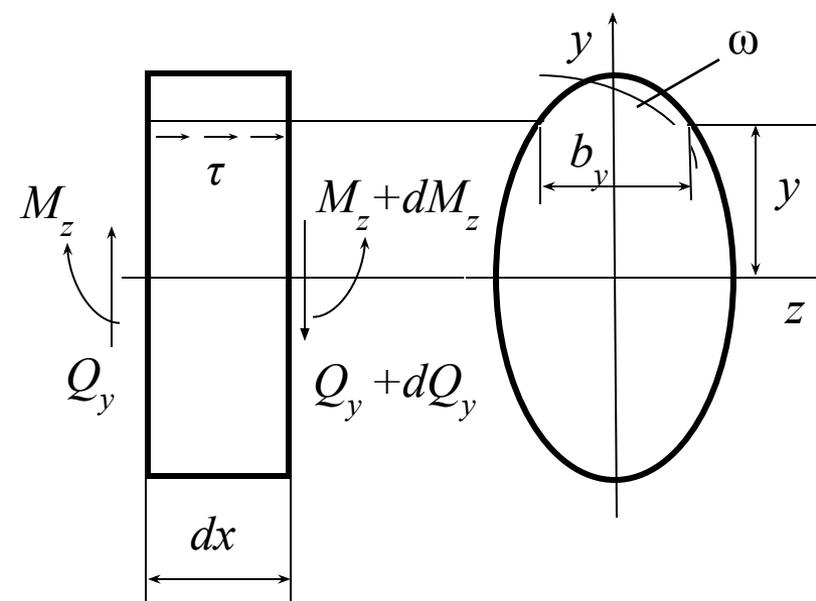
$$N_\omega + dN_\omega = \int_\omega (\sigma + d\sigma) dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} S_z^\omega$$

$$S_z^\omega = \int_\omega y dA$$

статический момент отсеченной части площади поперечного сечения  $\omega$  относительно оси  $Oz$ .

Рассмотрим условие равновесия отсеченного элемента составив для него уравнение статики

$$\sum x = 0 \Rightarrow N_\omega + dT - (N_\omega + dN_\omega) = 0$$

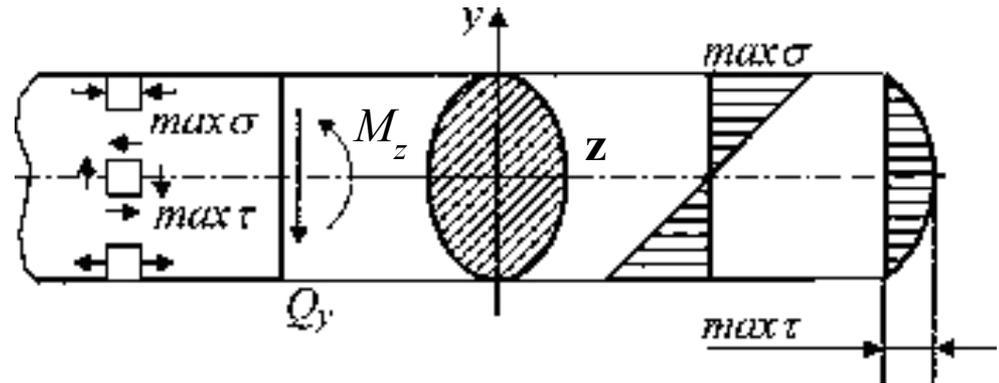


откуда после несложных преобразований, учитывая, что  $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$

получим 
$$\tau = \frac{Q_y S_z^\omega}{J_z b_y}$$

### Формула Журавского

Касательные напряжения по высоте сечения меняются по закону квадратичекокой параболы, достигая максимума на нейтральной оси



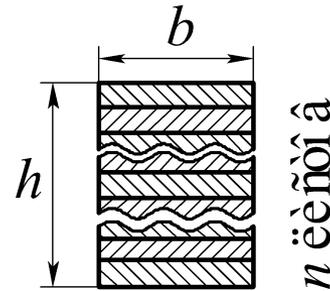
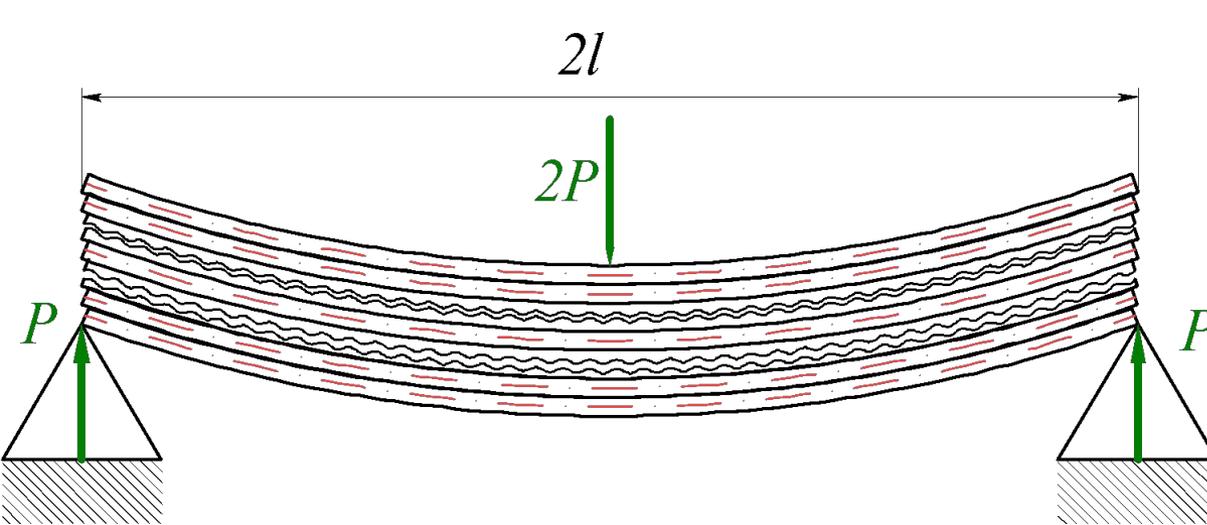
Учитывая, что наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних волокнах, где касательные напряжения отсутствуют, а наибольшие касательные напряжения во многих случаях имеют место в нейтральном слое, где нормальные напряжения равны нулю, условия прочности в этих случаях формулируются отдельно по нормальным и касательным напряжениям

$$\max \sigma \leq [\sigma];$$

$$\max \tau \leq [\tau].$$

### 3. Составные балки при изгибе

Касательные напряжения в продольных сечениях являются выражением существующей связи между слоями стержня при поперечном изгибе. Если эта связь в некоторых слоях нарушена, характер изгиба стержня меняется.

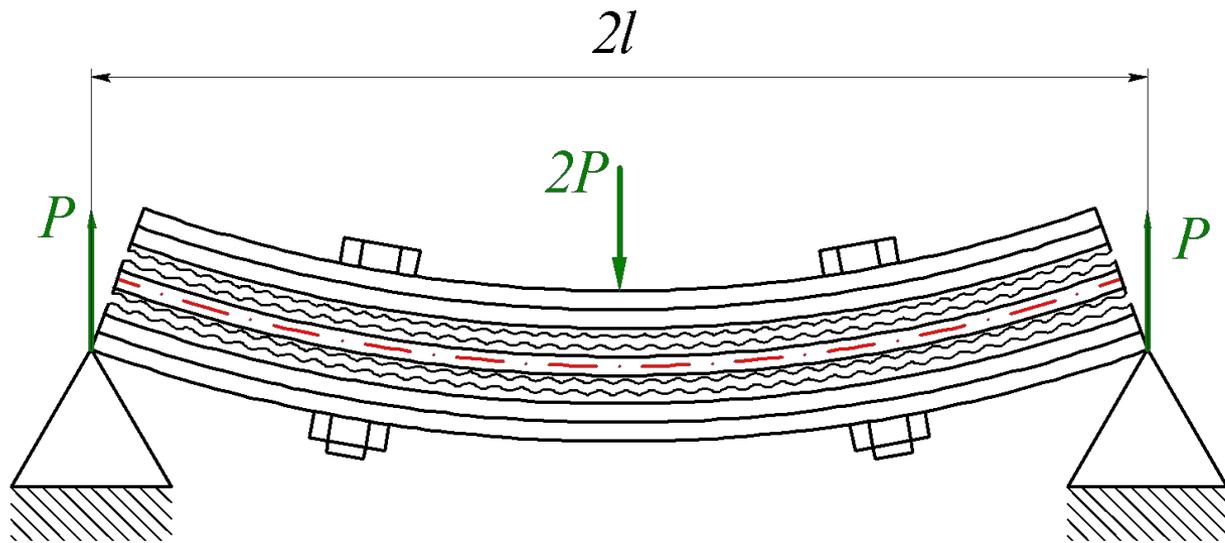


$$J_z = n \cdot \frac{b \cdot (h/n)^3}{12} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot n^2};$$

$$W_z = n \cdot \frac{b \cdot (h/n)^2}{6} = \frac{b \cdot h^2}{6 \cdot n}.$$

В стержне, составленном из листов, каждый лист при отсутствии сил трения изгибается самостоятельно. Изгибающий момент равномерно распределяется между составными листами. Максимальное значение изгибающего момента будет в середине балки и будет равно  $M_z = P \cdot l$ . Наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении листа равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{P \cdot l}{(b \cdot h^2)/(6 \cdot n)} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b \cdot h^2} \cdot n$$



$$J_z = \frac{b \cdot h^3}{12};$$

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Если листы плотно стянуть достаточно жесткими болтами, стержень будет изгибаться как целый. В этом случае наибольшее нормальное напряжение оказывается в  $n$  раз меньше, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{P \cdot l}{b \cdot h^2 / 6} = \frac{6 \cdot P \cdot l}{b \cdot h^2}$$

В поперечных сечениях болтов при изгибе стержня возникают поперечные силы. Наибольшая поперечная сила будет в сечении, совпадающем с нейтральной плоскостью изогнутого стержня.

Эту силу можно определить из равенства сумм поперечных сил в сечениях болтов и продольной равнодействующей касательных напряжений в случае целого стержня:

$$m \cdot Q_{\text{болта}}^{\max} = \tau_{\max} \cdot b \cdot l = \frac{3}{2} \frac{P}{b \cdot h} \cdot b \cdot l = \frac{3}{2} \frac{P \cdot l}{h} \quad \text{где } m \text{ - число болтов.}$$

Сопоставим изменение кривизны стержня в заделке в случае связанного и несвязанного пакетов.

Для связанного пакета:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3}$$

Для несвязанного пакета:

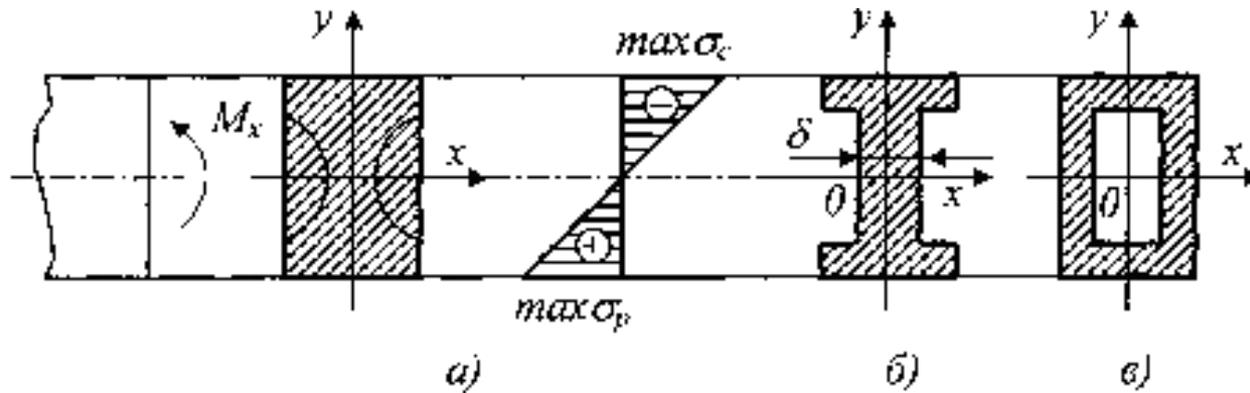
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} = \frac{(P/n) \cdot l}{E \cdot (b/12) \cdot (h/n)^3} = \frac{12 \cdot P \cdot l}{E \cdot b \cdot h^3} \cdot n^2$$

Пропорционально изменениям кривизны меняются и прогибы.

Таким образом, по сравнению с целым стержнем набор свободно сложенных листов оказывается в  $n^2$  раз более гибким и только в  $n$  раз менее прочным. Это различие в коэффициентах снижения жесткости и прочности при переходе к листовому пакету используют на практике при создании гибких рессорных подвесок. Силы трения между листами повышают жесткость пакета, так как частично восстанавливают касательные силы между слоями стержня, устраненные при переходе к листовому пакету. Рессоры нуждаются поэтому в смазке листов и их следует оберегать от загрязнения.

# 4. Рациональные формы поперечных сечений при изгибе

Наиболее рациональным является сечение, обладающее минимальной площадью при заданной нагрузке на балку. В этом случае расход материала на изготовление балки, будет минимальным. Для получения балки минимальной материалоемкости нужно стремиться к тому, чтобы по возможности наибольший объем материала работал при напряжениях, равных допускаемым или близким к ним. Прежде всего рациональное сечение балки при изгибе должно удовлетворять *условию равнопрочности растянутой и сжатой зон балки*. Для этого необходимо, чтобы наибольшие напряжения растяжения и наибольшие напряжения сжатия одновременно достигали допускаемых напряжений. Приходим к *рациональному для пластичного материала сечению в форме симметричного двутавра*, у которого возможно большая часть материала сосредоточена на полках, соединенных стенкой, толщина которой назначается из условий прочности стенки по касательным напряжениям. К двутавровому сечению близко по критерию рациональности так называемое коробчатое сечение

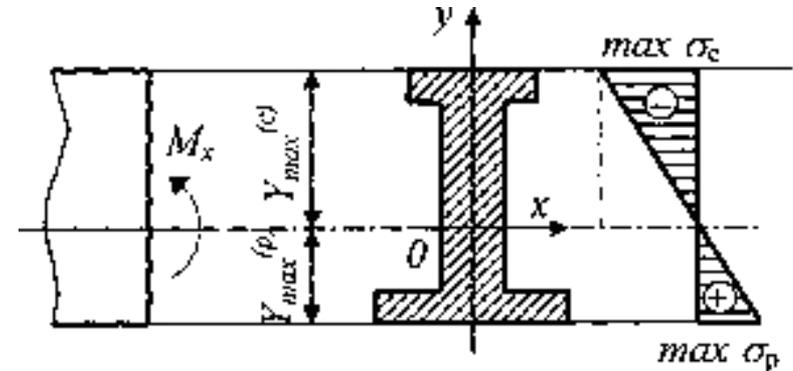


Для балок из хрупкого материала наиболее рациональным будет сечение в форме несимметричного двутавра, удовлетворяющего условию равнопрочности на растяжение и сжатие

$$\frac{y_{\max}^{(p)}}{y_{\max}^{(c)}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$$

которое вытекает из требования

$$\frac{\max \sigma_p}{\max \sigma_c} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$$

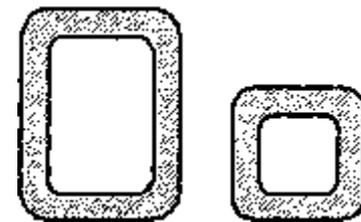


Идея рациональности поперечного сечения стержней при изгибе реализована в стандартных тонкостенных профилях, получаемых методами горячего прессования или прокатки из рядовых и легированных конструкционных высококачественных сталей, а также алюминия и алюминиевых сплавов.



а) б) в) г)

а—двутавр, б—швеллер, в — неравнобокий уголок, г—равнобокий уголок.



холодногнутые замкнутые сварные профили