

**Математичне програмування.
Задачі оптимізації. Задача
лінійного програмування.**

Питання

- Вступ до математичного програмування.
- Способи подання оптимізаційної задачі.
- Задача цілочисельного лінійного програмування.
- Приклади застосування задач математичного програмування.
- Аксиоматичні поняття математичного програмування.
- Основні поняття систем лінійних рівнянь і нерівностей.
- Лінійне програмування.

Вступ до математичного програмування

- Прикладна математична дисципліна, що досліджує екстремальні задачі і розробляє методи їх розв'язання називається **математичним програмуванням**.
- Задачі, що розглядаються в математичному програмуванні називають **оптимізаційними**.

В різних областях людської діяльності економісти зустрічаються із задачами, які характеризуються такими властивостями:

- 1) на змінні величини накладається велика кількість обмежень;
- 2) задача має велику кількість розв'язків, із яких потрібно вибрати найкращий (оптимальний).

- **Математична модель** – де досить точний опис задачі за допомогою математичного апарату (різного роду функцій, рівнянь, системи рівнянь, нерівностей тощо); вимоги, що накладаються до створення моделей досить суперечливі.

Побудова математичних моделей включає такі етапи:

1. Представляється у вигляді деякої залежності від невідомих величин переслідувана мета(прибуток від реалізації виробленої продукції, сумарні витрати на перевезення вантажів тощо). Отриманий враз називається **цільовою функцією, функцією цілі, функціоналом або критерієм ефективності даної задачі.**
2. Формулюються умови, що повинні бути накладені на невідомі величини (змінні), які витікають із наявності ресурсів, із необхідності задоволення потреб, із умов технології та інших економічних та технічних факторів. Ці умови представляють собою нерівності або рівняння.

Серед задач математичного програмування слід виділити такі основні:

- Задачі лінійного програмування, якщо критерій ефективності та функції обмежень лінійні.
- Задачі цілочислового програмування у випадку, коли змінні приймають цілі значення.
- Якщо критерій ефективності і (або) система обмежень задаються нелінійними функціями, то є задача нелінійного програмування.
- Якщо цільова функція є відношенням двох багаточленів, то таку задачу називають задачею дробово-лінійного програмування.
- До задач параметричного програмування відносяться такі, в яких дані в задачі вважаються не сталими величинами, а функціями, що залежать від деякого параметра.
- Якщо цільова функція та функції обмежень мають властивості опуклості, то дана задача є задачею опуклого програмування.
- Якщо в задачі математичного програмування є змінна часу і критерій ефективності виражається не в явному вигляді, як функція змінних, а через рівняння, які описують протікання операцій з часом, то така задача є задачею динамічного програмування.
- Якщо функції мети та цілі носять випадковий характер, то така задача є задачею стохастичного програмування.
- Якщо із-за досить великого числа розв'язків точний оптимум знайти не вдається, то звертаються до методів евристичного програмування, яке дозволяє скоротити число варіантів і знайти, якщо не оптимальний розв'язок, то достатньо наближений до нього розв'язок.

І Прикладом використання знань з математичного програмування може бути розв'язання таких виробничих задач:

- отримання максимального прибутку або випуску максимального об'єму продукції при заданих матеріальних, трудових, енергетичних або часових витратах;
- забезпечення планових показників підприємства при мінімальному розмірі фінансових вкладень;
- досягнення максимально короткого терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкту, товарообігу, виробничого циклу і тому подібного при існуючих або заданих виробничих ресурсах;
- вибір параметрів об'єкту або процесу, при яких забезпечується його максимальна корисність.

Способи подання оптимізаційної задачі

- змістовна (вербальна) постановка
- формальна постановка

Приклад (змістовна постановка задачі).

- Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує деревину. Виготовлення одного столу потребує 2 м^2 деревини, однієї шафи – 4 м^2 . Трудомісткість виробу складає: одного столу – 4 чол.-год, однієї шафи – 3 чол.-год. Прибуток від реалізації становить: одного столу – 80 грн, однієї шафи – 100 грн. Підприємство для виготовлення столів і шаф у своєму розпорядженні має 200 м^2 деревини та 600 чол.-год фонду робочого часу. Визначити, скільки столів і шаф треба виготовити, щоб прибуток від реалізації всіх виробів був максимальним.

Поетапний процес побудови математичної моделі задачі.

- Визначимо невідомі задачі.
- Сформуємо цільову функцію.
- Сформуємо **математичну модель задачі** без урахування обмежень задачі.
- Визначимо обмеження задачі Ω , тобто область припустимих рішень.
- Сформуємо завершальну математичну модель задачі (з урахуванням обмежень).

Задача цілочисельного лінійного програмування

$$Y(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \rightarrow \max.$$

$$\Omega: \quad f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \leq 400;$$

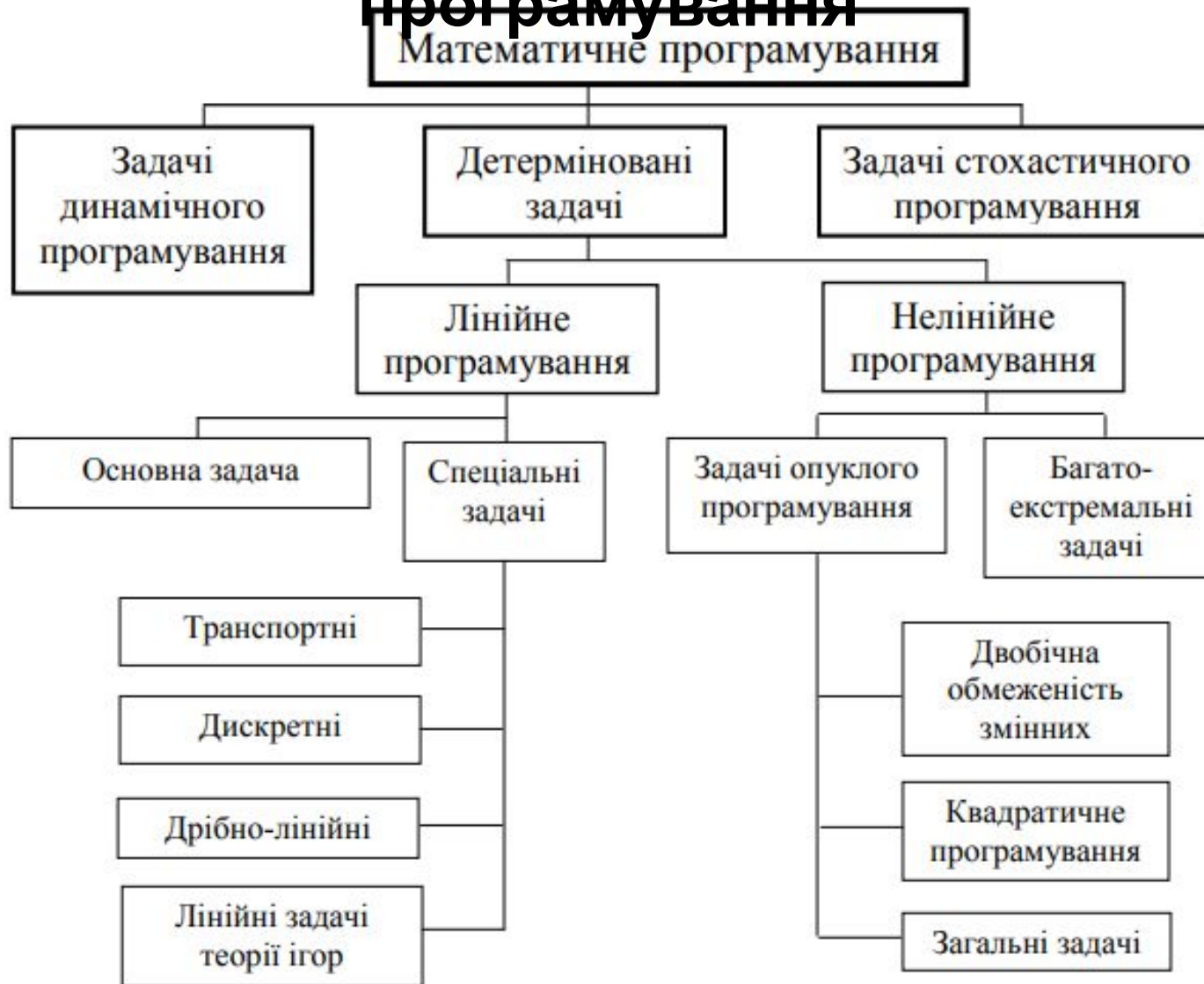
$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \leq 600;$$

$$x_1, x_2 \geq 0;$$

$$x_1, x_2 = \text{int}.$$

Предметом математичного програмування є способи математичного моделювання оптимізаційних задач, визначення необхідних і достатніх умов наявності екстремумів (оптимумів), розробка і дослідження методів визначення оптимальних рішень, які обминають пошук екстремальних рішень прямим перебором.

Класифікація задач математичного програмування



- **Динамічне програмування** – це розділ математичного програмування, що пов'язаний з вирішенням екстремальних задач спеціальної структури, а саме задач, в яких процес пошуку оптимального рішення є багатоетапним.
- **Стохастичне програмування** має справу з екстремальними задачами, в постановці яких присутні випадкові величини.
- **Детерміновані задачі** – це найбільш поширений клас задач математичного програмування. Вихідна інформація в таких задачах є повністю визначеною. Всі детерміновані задачі поділяються на задачі лінійного чи нелінійного програмування.
- **Нелінійне програмування.** В задачах цього класу цільова функція й (або) обмеження є нелінійними функціями. В нелінійному програмуванні виділяють клас багатоекстремальних задач та клас задач опуклого

В **багатоекстремальних** задачах цільова функція має декілька екстремумів. В задачах опуклого програмування – тільки один.

Опукле програмування об'єднує три підкласи екстремальних задач:

- задачі при двобічних обмеженнях змінних і відсутності обмежень у вигляді рівнянь;
- задачі *квадратичного програмування*, які пов'язані з пошуком екстремуму квадратичної функції при лінійних обмеженнях;
- задачі в загальній постановці, тобто ті, що не належать до двох попередніх підкласів.

Лінійне програмування. В задачах цього класу цільова функція та всі обмеження є лінійними функціями. Лінійне програмування об'єднує:

- підклас задач дискретного програмування;
- підклас задач дрібно-лінійного програмування;
- підклас задач параметричного програмування;
- підклас транспортних задач.

- В задачах **дискретного** (цілочислового) програмування невідомі (змінні) можуть приймати тільки цілочислові значення.
- У задачах **дрібно-лінійного** програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, є звичайними лінійними функціями.
- У задачах **параметричного** програмування цільова функція або функції обмежень, або й те й інше залежать від деяких параметрів (коефіцієнти можуть змінюватися в деяких межах).
- Окремим класом лінійних задач являють собою **транспортні** задачі, в яких змінні подаються у вигляді матриці.

До оптимізаційних задач можна віднести наступні класи задач:

- *задачі планування виробництва* (планування випуску продукції, завантаження встаткування, фінансування проектів, розподіл парку машин, календарне планування, сіткове планування);
- *задачі організації виробництва* (формування парку встаткування, про призначення, про реконструкцію підприємства, про розташування виробничих одиниць, про закриття заводу);
- *транспортні задачі* (перевезення вантажів з максимальним завантаженням транспорту й з максимальним об'ємом перевезень, розподіл транспортних засобів, розміщення вантажного флоту);
- *комбінаторні задачі* (про ранець, про лінійний розкрій, про розподіл пам'яті комп'ютера, про комівояжера).

Аксіоматичні поняття математичного програмування

- *цільова функція, цільова квадратична форма, функція плану, критерій оптимізації* – функція, для якої треба визначити оптимальне рішення або знайти екстремальне значення. Познач y , $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y(\bar{x})$ або $y(\mathbf{x})$;
- *оптимум (максимум або мінімум)* – найбільше (при максимізації) або найменше (при мінімізації) значення цільової функції y , позначення:

$$\text{opt } y, \quad y^*, \quad y(\bar{x}^*) \quad \text{або} \quad y(\mathbf{x}^*);$$

- *оптимальне рішення, оптимальний план, оптимальна точка* – значення змінних оптимізаційної задачі, при яких цільова функція набуває екстремального значення. Позначення:

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \quad \bar{x}^*, \quad \mathbf{x}^*, \quad \arg(y^*) \quad \text{або} \quad \arg(y \rightarrow \text{opt});$$

- *область припустимих рішень* – множина точок, серед яких шукається оптимальне рішення; позначення: R^n , Ω ;
- *обмеження задачі у вигляді рівностей* – система рівностей або нерівностей, можливі рішення якої формують область Ω . Позначення:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad \text{де } i = \overline{1, n}; \quad f_i(\bar{x}) = 0, \quad \text{де } i = \overline{1, n}; \quad f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{де } i = \overline{1, n}$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = 0 \quad \text{або} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0;$$

- двобічна обмеженість змінних – вираз, що визначає відрізок можливих значень змінних. Позначення:

$$\bar{x}^+ \leq \bar{x} \leq \bar{x}^{++}.$$

- загальна задача математичного програмування – задача пошуку оптимального рішення або оптимуму нелінійної цільової функції. Позначення:

$$y(\bar{x}) \rightarrow \underset{\bar{x} \in \Omega}{\text{opt}},$$

$$\Omega: \quad \bar{f}(\bar{x}) = 0; \quad \bar{x}^+ \leq \bar{x} \leq \bar{x}^{++}.$$

Лінійне програмування

- **Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП)** формулюється в такий спосіб: знайти оптимум лінійної функції цілі $y(\bar{x})$, якщо обмеження Ω і лінійні й вектор змінних невід'ємний.

- Аналітично $y(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x} + c_0 \rightarrow \underset{\bar{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}{\text{opt}}$, є вигляд:

$$\Omega: \begin{cases} A_1 \bar{x} \leq \bar{b}_1; \\ A_2 \bar{x} = \bar{b}_2; \\ A_3 \bar{x} \geq \bar{b}_3; \\ \bar{x} \geq 0, \end{cases}$$

Канонічна ЗЛП

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^T \bar{x} + c_0 \rightarrow \underset{\bar{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}{\text{opt}},$$

$$\Omega: \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; \\ \bar{x} \geq 0, \end{cases}$$

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + c_0 \rightarrow \underset{\Omega}{\text{opt}},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}), \end{cases}$$

Приклад

$$y = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \rightarrow \min_{x_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega : \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2; \\ f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3; \\ f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6; \\ f_4 = x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання ЗЛП графічним методом

$$y(\bar{x}) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2}{\text{opt}},$$

1.

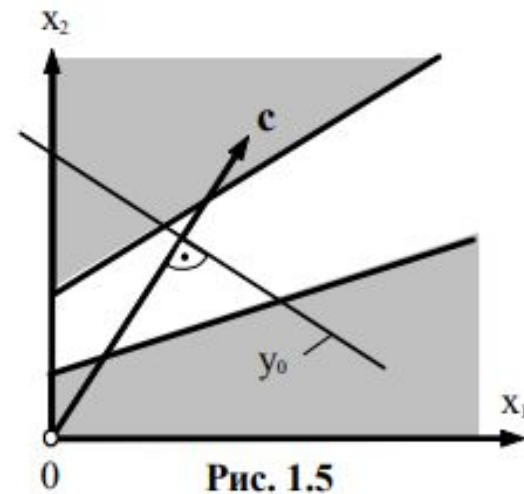
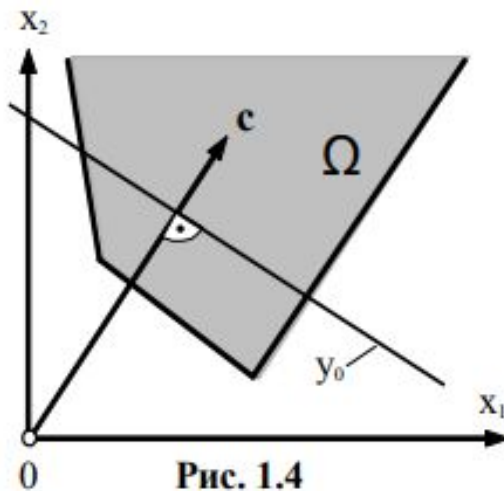
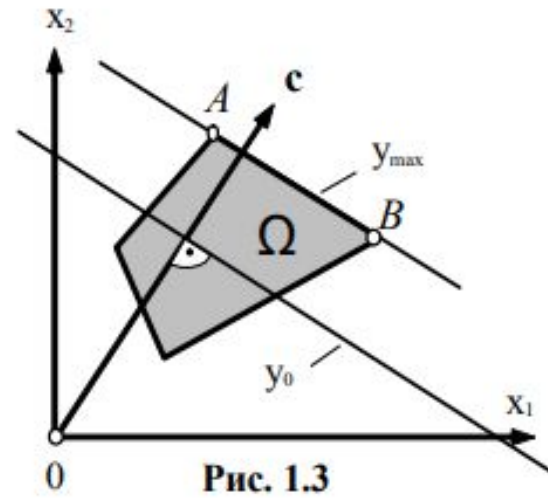
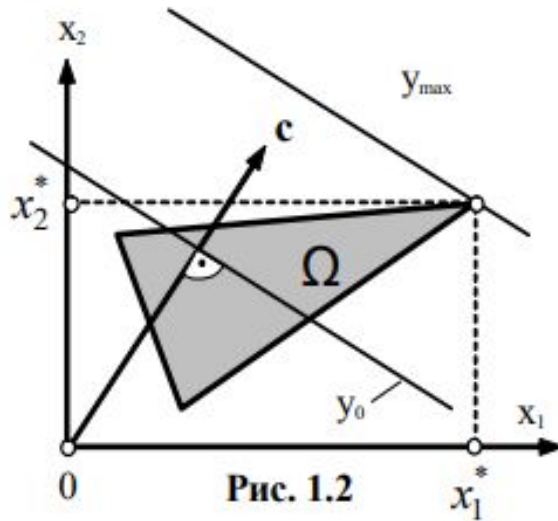
$$\Omega: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix};$$

$$\bar{x} \geq 0,$$

Алгоритм розв'язання ЗЛП графічним методом

1. Приведення математичної моделі задачі до вигляду 1.
2. Побудова прямих, визначених рівняннями $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$,
 $i = \overline{1, m}; x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.
3. Знаходження напівплощин, обумовлених кожним з обмежень задачі 1.
4. Виділення багатокутника рішень.
5. Побудова прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, що проходить через багатокутник рішень.
6. Побудова вектора $\bar{c}^T = [c_1 \ c_2]$.
7. Переміщення прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ в напрямку вектор $\bar{c}$
до границі області Ω або у зворотному напрямку вектор $\bar{c}$.
8. Визначення координат граничної точки шляхом розв'язання системи двох рівнянь.
9. Обчислення значення цільової функції y^* в точці $\bar{x}^*$.

Пошук максимуму цільової функції



Приклад

- Знайти максимум і мінімум функції $y = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16;$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 9;$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$