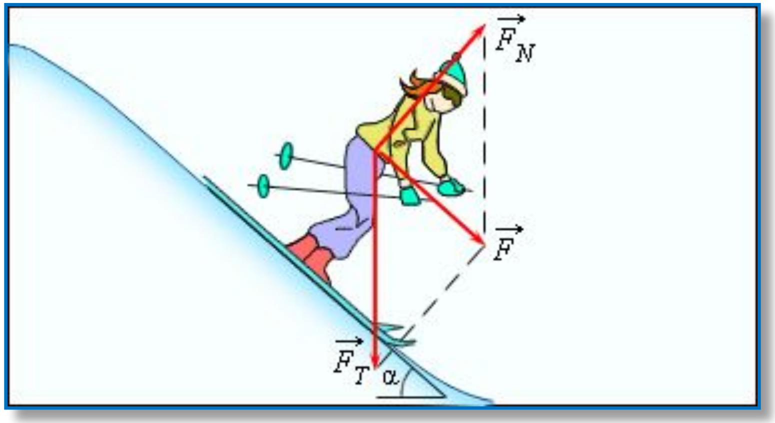
Курс физики для студентов 1-2 курса БГТУ
Заочный факультет
для специальностей ЛИД, ТДП, ТДП$_с$, МОЛК, МОЛК$_с$
Кафедра физики БГТУ

доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция 3а.
Работа и механическая энергия



Равнодействующая сил

2015

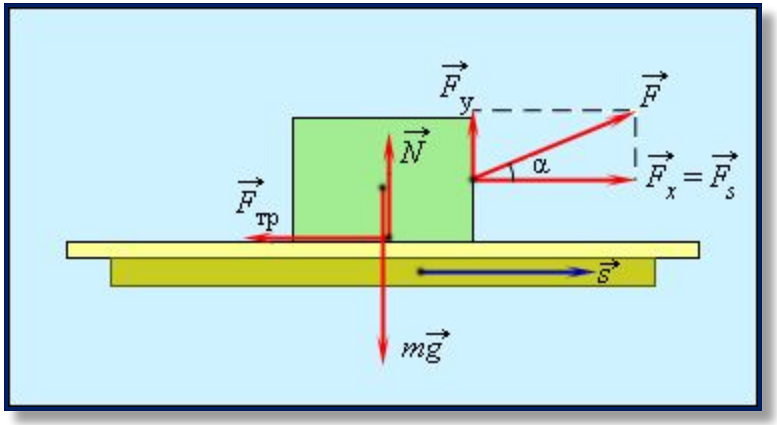
Работа постоянной силы

- **Работа** – это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Рассмотрим вариант, когда **тело движется прямолинейно** и на него действует **постоянная сила**.

- Работой A, совершаемой постоянной силой F, называется физическая величина, равная **произведению** модулей силы и перемещения s, умноженному на косинус угла α между векторами силы и перемещения:

$$A = F \cdot s \cdot cos\alpha$$

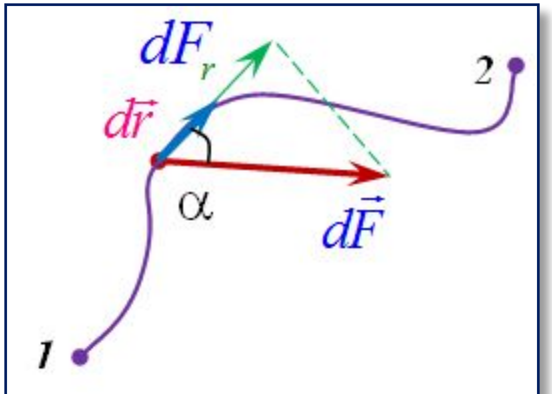


- Работа – **скалярная** величина (число):
  - может быть как **положительной** ($0° \leq \alpha < 90°$),
  - так и **отрицательной** ($90° < \alpha \leq 180°$);
  - при $\alpha = 90°$ работа, совершаемая силой, равна нулю.

- В системе СИ работа измеряется в **джоулях (Дж)**.

- Джоуль равен работе A, совершаемой силой F в 1 Н на перемещении S тела на 1 м в направлении действия силы ($\alpha = 0°$).

Работа переменной силы



- В случае переменной силы водится понятие элементарной работы δA.
- Элементарной работой δA, совершаемой переменной силой dF, называется физическая величина, равная **скалярному произведению** векторов силы и элементарного перемещения dr:

$$\delta A = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = dF \cdot ds \cdot cos\alpha$$

dF_r – проекция силы dF на касательную к траектории.

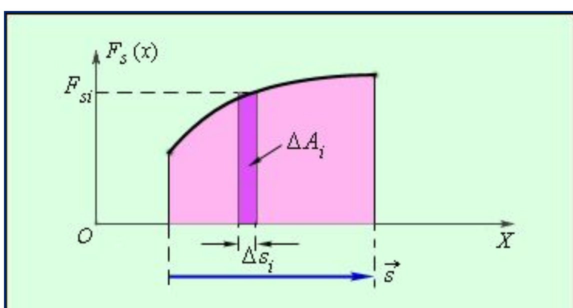
Работа, совершаемая силой на конечном участке пути 1–2:

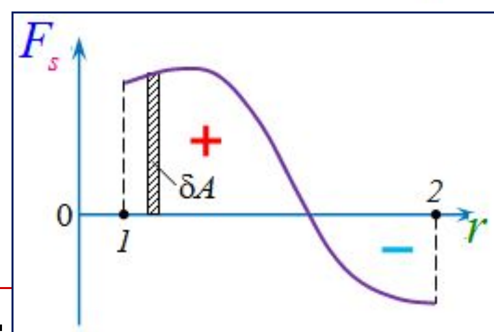
равна сумме элементарных работ ΔA_i на **отдельных малых участках пути** Δs_i :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} F_{si} \Delta s_i$$

равна сумме элементарных работ δA на **отдельных бесконечно малых участках пути** dr :

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos\alpha$$

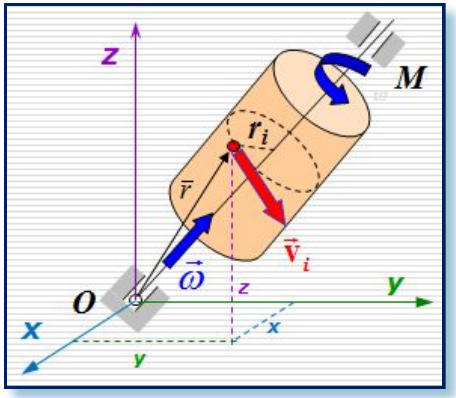




При сильных изменениях силы dF:

$$A = \int_{F_1}^{F_2} dF \int_{r_1}^{r_2} dr \cos\alpha$$

Работа силы при вращении



Вращение тела вокруг оси ОМ

- Найдем работу силы при вращательном движении вокруг оси **ОМ**.
- Воспользуемся тем, что скорость точки при вращательном движении связана с угловой скоростью вращения соотношением: $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Тогда перемещение: $d\vec{r} = \vec{\mathbf{v}}dt = (\vec{\omega} \times \vec{r})dt$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F}(\vec{\omega} \times \vec{r})dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})dt$$

так как смешанное произведение векторов допускает их циклическую перестановку:

$$\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

Причем момент силы, действующий на тело: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ Тогда: $\delta A = \vec{\omega}\vec{M}dt$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения **ОМ**, значит скалярное произведение векторов:

$\vec{\omega}\vec{M} = \omega M \cos\beta$ причем: $M\cos\beta = M_{OM}$ проекция момента силы на ось вращения.

$$\delta A = \omega M_{OM}dt = \frac{d\varphi}{dt} M_{OM}dt = M_{OM} \cdot d\varphi$$

если $M_z = \mathrm{const}$ $\boxed{A = M_z\varphi}$

Чаще ось обозначают ***Z:*** $\delta A = M_z d\varphi$

Работа силы при повороте тела на конечный угол φ: $A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi$

Мощность

- Для характеристики **скорости совершения работы** вводят понятие мощности.
- **Средняя мощность** равна работе за единицу времени: $$N_{cp} = \frac{A}{t}$$
- **Мгновенная мощность** - мощность в данный момент времени равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{\mathbf{v}}$$

При вращательном движении мощность силы определяется моментом этой силы и угловой скоростью:

$$\boxed{A = M_z \varphi} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$P = M_z \omega = \vec{M}\vec{\omega}$$

- В Международной системе (СИ) единица мощности называется **ватт (Вт)**.
- Ватт равен мощности силы, совершающей работу в 1 Дж за время 1 с:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$$

Кинетическая энергия.
Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия тела или системы тел - это энергия, которой обладает тело или система **вследствие своего движения**.

Пусть тело массой ***m*** движется поступательно под действием некоторой силы (или результирующей нескольких сил):

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$ на элементарном перемещении $$d\vec{r} = \vec{\mathbf{v}}dt$$

- Тогда элементарная работа, которую совершает эта сила на элементарном перемещении:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}d\vec{r} = m\vec{\mathbf{v}}d\vec{\mathbf{v}} = md\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = d\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right)$$

- **Вывод:** работа силы идет на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют кинетической энергией тела.
  - Таким образом, **кинетическая энергия** – это энергия тела, обусловленная его механическим движением.
  - Для тела массой ***m*** двигающегося поступательно со скоростью кинетическая энергия определяется соотношением:

$$K = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$$

$$A = K_2 - K_1 = \Delta K$$

- Интегрируем от начальной до конечной скорости и получим теорему об изменении кинетической энергии:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 d\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right) = \frac{m}{2}\left(\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2\right)$$

Приращение кинетической энергии тела при некотором перемещении равно работе результирующей всех сил, действующих на тело на том же перемещении.

Кинетическая энергия при вращении тела

- При вращательном движении тела скорости точек тела связаны с угловой скоростью вращения соотношением: $\mathbf{v}_i = \omega r_i$, где r_i - расстояние от точек тела до оси вращения. Тогда кинетическая энергия тела **при вращательном движении**:

$$K = \sum \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2}$$

где $I_z = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции тела относительно оси вращения Z

Любое движение твердого тела может быть представлено как **сумма** поступательного и вращательного движений.

Как следствие, ***кинетическая энергия плоского движения тела*** будет слагаться из кинетической энергии поступательного движения со скоростью $\mathbf{v}$ центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$K = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2}$$

Сравнение характеристик поступательного и вращательного движения

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие поступательное движение тела и его вращение вокруг неподвижной оси:

Поступательное движение тела	**Вращательное движение тела**
Масса m	Момент инерции I
Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила $\vec{F}$ или F	Момент силы $\vec{M}$ или M_z
Импульс $p = mv$	Момент импульса $L_z = I_z\omega$

Важные формулы	**Поступательное движение тела**	**Вращательное движение тела**
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$ или $F_x = \frac{dp_x}{dt}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ или $M_z = \frac{dL_z}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	$K = \frac{I_z\omega^2}{2}$

Консервативные и неконсервативные силы

Все силы в механике делятся на:

Консервативные силы

Силы, работа которых **не зависит** от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положения движущейся точки.

их работа по замкнутому контуру **равна** нулю $\oint dA = 0$

Примеры таких сил: тяготения, тяжести, упругости, электростатические и др., которые являются **центральными**.

Неконсервативные силы

Силы, работа которых **зависит** от формы траектории, описываемой точкой приложения силы.

их работа по замкнутому контуру **не равна** нулю $\oint dA \neq 0$

Среди неконсервативных сил выделяют диссипативные и гироскопические силы.

- 1) **Диссипативные силы**. К ним относятся, в частности, силы трения и силы сопротивления среды. Полная работа этих сил является отрицательной.
  - При наличии сил трения и сопротивления энергия механической системы уменьшается, переходя во внутреннюю энергию тел, что приводит к их **нагреванию**. Такой процесс называют **диссипацией энергии**, а силы называют диссипативными.
- 2) **Гироскопические силы**. Эти силы зависят от скорости движения материальной точки и действуют **перпендикулярно** к этой скорости. Работа таких сил всегда равна нулю, однако от консервативных сил они отличаются тем, что определяются не только положением точки, но и ее скорости.
  - Примером такой силы является сила Лоренца. Сила Лоренца − это сила, действующая на заряженную частицу q, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, в магнитном поле с индукцией B:

$$\vec{F}_{\text{л}} = q\left[\vec{\mathbf{v}} \times \vec{B}\right]$$

+6

Понятия потенциальной энергии и потенциального поля

- **Потенциальная энергия П** (или W_p) - часть общей механической энергии системы, зависящей от взаимного расположения материальных точек системы и их положения во внешнем силовом поле.
  - Из определения следует, что потенциальная энергия системы не должна зависеть от того, каким образом данная конфигурация частиц системы возникла.
  - Это значит, что **понятие потенциальной энергии** имеет смысл лишь в том случае, когда на материальные точки системы действуют **только консервативные силы**.
  - Изменение потенциальной энергии системы должно определяться только работой консервативных сил. Другими словами, **работа консервативных сил** при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна **убыли потенциальной энергии**: $A=-(П_2-П_1)=-ΔП$

- Таким образом, силовое поле консервативных сил является **потенциальным полем**.

- **Поле силы** – это область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда частицу действует сила, закономерно меняющаяся от точки к точке.
  - Примером может служить поле силы тяжести Земли или поле сил сопротивления в потоке жидкости (газа).
  - Если сила в каждой точке силового поля не зависит от времени, то такое поле называют **стационарным**. Ясно, что силовое поле, стационарное в одной системе отсчета, в другой системе может оказаться и нестационарным. В стационарном силовом поле сила зависит только от положения частицы.
- **Потенциальное поле** – это стационарное силовое поле, в котором работа силы поля на пути между двумя любыми точками не зависит от формы пути, а зависит только от положения этих точек.
  - Силы потенциального поля обязательно **консервативные**. Если это условие не выполняется, то силовое поле не является потенциальным.
  - **Силовое поле** представляет собой особую форму существования материи, посредством которой осуществляются гравитационное, электромагнитное, ядерное и другие взаимодействия.

Связь между силой и энергией потенциального поля

- Взаимодействие в консервативной системе может быть описано с помощью потенциальной энергии **П** либо с помощью сил **F** взаимодействия точек системы.
  - Поэтому между потенциальной энергией и силой, действующей на материальную точку, должна существовать определенная взаимосвязь.
- Потенциальная энергия системы является функцией координат **П(x, y, z)**.

- Пусть силы, действующие на систему, выполнили элементарную работу:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

С другой стороны:

$$dA = -d\Pi = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz\right)$$

- Сравнивая выражения, получим выражения для проекций сил поля:

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx, \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

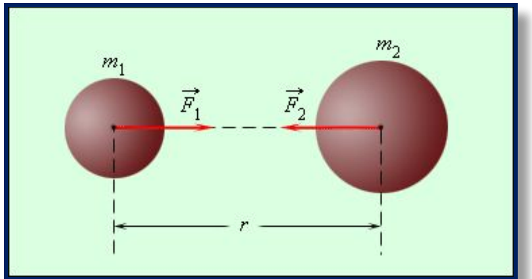
- Для вектора силы получаем следующее выражение:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\Pi$$

Эквипотенциальная поверхность – поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия **П** имеет одно и то же значение.

- Градиент **П** – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии **П**.
- Вектор силы **F** направлен в сторону уменьшения **П** и противоположен по направлению вектору **gradП** .

Примеры нахождения потенциальной энергии: гравитационная сила



- Найдем **потенциальную энергию** тела массы ***m***, находящегося в гравитационном поле Земли.
  - На тело действует гравитационная сила при $F_г = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ направленная к центру Земли Учитывая направление силы, ее вектор можно записать в виде:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}$$

где ***M*** - масса Земли, ***r*** - радиус-вектор, направленный от центра Земли к телу.

Пусть тело перемещается по произвольному пути от точки *1* до точки *2.* **Работа гравитационной силы** по перемещению тела:

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = -GmM\int_1^2 \frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^3} = -GmM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \quad -GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = -\frac{GmM}{r_1} - \left(-\frac{GmM}{r_2}\right)$$

Но работа $A=-\Delta\Pi$.

Поэтому потенциальная энергия гравитационных сил:

$$\Pi = -G\frac{mM}{r}$$

Примеры нахождения потенциальной энергии: сила упругости и сила тяжести

- Найдем потенциальную энергию тела массы ***m***, находящегося в поле **силы упругости** (пружины).
- Для этого рассмотрим колебания пружины вдоль оси ***x*** и вычислим работу силы упругости при деформации пружины от x_1 до x_2. Учитывая, что сила упругости направлена в сторону, противоположную деформации, элементарная работа силы упругости:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx = -kx dx$$

где $F_x = -kx$ - проекция силы упругости на ось ***x***, ***r*** - радиус-вектор, направленный по оси ***x***.

Пусть тело перемещается по пути от точки *1* до точки *2.* **Работа силы упругости** по перемещению тела:

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

Но работа $A = -\Delta \Pi$. Поэтому **потенциальная энергия сил упругости**:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}$$

Сила тяжести. Найдем потенциальную энергию тела, находящегося в поле силы тяжести Земли. **Работа силы тяжести** *($F = mg$)* по перемещению тела из точки *1* в точку *2:*

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = -mg\int_{h_1}^{h_2} dh = mgh_1 - mgh_2$$

где ***h*** - высота тела над поверхностью Земли.

Поэтому **потенциальная энергия силы тяжести**:

$$\Pi = mgh$$

Закон сохранения механической энергии

- Пусть на материальные точки системы действуют только консервативные силы.
  - Тогда при переходе системы из одного состояния работа консервативных сил равна:

$$A = К_2 - К_1 \text{ или } A = -(П_2 - П_1).$$

- Тогда $К_2 - К_1 = -(П_2 - П_1)$, значит: $К_2 + П_2 = К_1 + П_1 = const$
- Величину $E = К + П$ называют **полной механической энергией системы**.
- Отсюда следует **закон сохранения полной механической энергии:** полная механическая энергия системы, на материальные точки которой действуют **только консервативные силы**, с течением времени не изменяется: $E = const$.
- Если на систему действуют помимо консервативных сил еще и неконсервативные силы, то:

$$A_{конс} + A_{неконс} = К_2 - К_1$$

- Работа консервативных сил равна: $A_{конс} = -(П_2 - П_1)$
- В этом случае изменение полной механической энергии системы равно работе неконсервативных сил:

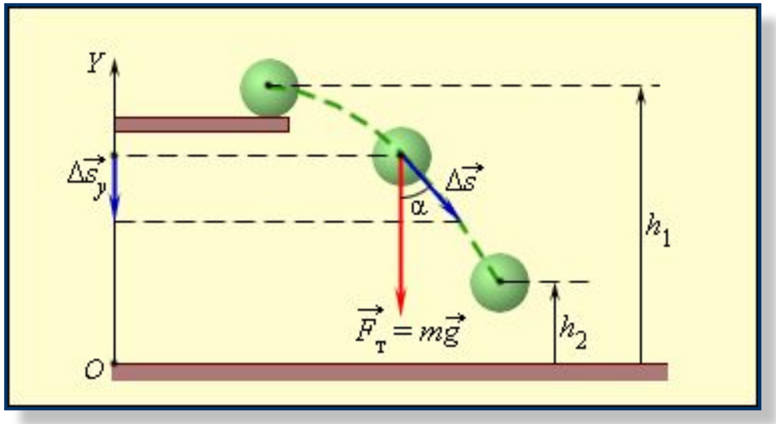
$$E_2 - E_1 = A_{неконс}$$

- **Вывод:** в системе, в которой кроме консервативных сил, действуют также неконсервативные силы, **полная механическая энергия системы не сохраняется**, и **закон сохранения механической энергии не выполняется**. Но всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида взамен механической энергии. Таким образом, выполняется фундаментальный закон сохранения и превращения энергии. Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

+5

доцент Крылов Андрей Борисович

Спасибо за внимание!



Сила тяжести консервативная и совершила работу:

$$A = -mg(h_2 - h_1) = -(mgh_2 - mgh_1) = -\Delta\Pi$$