

Численные методы решения систем линейных уравнений

§2. Численные методы решения СЛУ

В. Какие методы решения СЛУ Вы изучали?

О. - метод подстановки,
- метод сложения,
- метод Гаусса,
- метод Крамера,
- матричный метод.

§2. Численные методы решения СЛУ

В. С какими проблемами можно столкнуться при решении СЛУ?

О. - многие точные методы настолько трудоёмки, что применять их не целесообразно;

- как правило, точное решение не является необходимым, а достаточно приближённого решения, с наперёд заданной точностью.

§2. Численные методы решения СЛУ

В. Что нужно знать для численного решения СЛУ?

О. - итерационные формулы;
- формулы оценки погрешности.

§2. Численные методы решения СЛУ

Цель: научиться решать СЛУ численными методами.

Задачи: изучить итерационные формулы и формулы оценки погрешности для численного решения СЛУ.

§2. Численные методы решения СЛУ

п1. Постановка задачи.

Методы решения систем линейных уравнений разбиваются на две группы:

- 1) точные методы - алгоритмы, позволяющие получить решение за конечное число арифметических действий (метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод);
- 2) приближенные методы - алгоритмы, позволяющие получить приближенное решение за некоторое число определённых итераций.

Необходимость в приближенных методах возникает, так как использование точных методов требует большого числа арифметических операций. Метод Крамера и матричный метод считается целесообразным применять при количестве переменных до 10^3 , метод Гаусса – до 10^6

§2. Численные методы решения СЛУ

п1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты a_{ij} при неизвестных и свободные члены b_i – действительные числа.

Опр. Вектор $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется решением системы (1), если при подстановке его координат в систему (1) каждое уравнение превращается в верное числовое равенство.

Система (1) имеет единственное решение если $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$.

Поставим задачу нахождения решения системы линейных уравнений (1) с точностью ε .

Рассмотрим два приближенных метода решения систем линейных уравнений: метод итерации и метод Зейделя.

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Рассмотрим систему линейных уравнений (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

$$\text{Приведём систему (1) к виду (2)} \quad \begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$$

Запишем систему (2) в матричной форме $\dot{x} = Cx + d$, где $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Рекуррентная формула метода итераций имеет вид $x^{[k+1]} = Cx^{[k]} + d$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где в качестве начального приближения $x^{[0]}$ можно выбрать любой вектор, но, как правило, выбирают $x^{[0]} = d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$.

Достаточное условие сходимости итерационной последовательности имеет вид:

Теорема. Если матрица C коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2) удовлетворяет условию

$$q = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1,$$

то система (2) имеет единственное решение x и построенная последовательность сходится к точному решению при любом начальном приближении $x^{[0]}$, причем имеет место оценка погрешности:

$$\Delta_k = \frac{q^k}{1 - q} \max_{i=1, n} |x_i^{[1]} - x_i^{[0]}| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Пример. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Приведем систему к итерационному виду:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_3 = -x_1 + x_2 + 2 \\ 2x_2 = -0,5x_1 + x_3 + 1 \\ 5x_1 = x_2 - x_3 + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -0,25x_1 + 0,25x_2 + 0,5 \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_1 = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 0,8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = 0,2x_2^* - 0,2x_3^* + 0,8 \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_3 = -0,25x_1 + 0,25x_2 + 0,5 \end{cases}$$

Найдем $q = \max\{|0| + |0,2| + |-0,2|; |-0,25| + |0| + |0,5|; |-0,25| + |0,25| + |0|\} = \max\{0,4; 0,75; 0,5\} = 0,75 < 1$ – условия метода выполнены, последовательность будет сходиться к точному решению при любом выборе начального приближения $x^{[0]}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Решение:

Итак, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,5 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Пусть $x^{[0]} = d$.

1 итерация

$$x^{[1]} = Cx^{[0]} + d = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,5 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,55 \\ 0,425 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \frac{q^1}{1 - q} \max_{i=1,n} |x_i^{[1]} - x_i^{[0]}| = \frac{0,75^1}{1 - 0,75} \max\{|0,8 - 0,8|; |0,55 - 0,5|; |0,425 - 0,5|\} = 0,225 \leq 0,01 - \text{неверно, переходим ко 2 итерации.}$$

2 итерация

$$x^{[2]} = Cx^{[1]} + d = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,5 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,55 \\ 0,425 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,825 \\ 0,5125 \\ 0,4375 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = \frac{q^2}{1 - q} \max_{i=1,n} |x_i^{[2]} - x_i^{[0]}| = \frac{0,75^2}{1 - 0,75} \max\{|0,8 - 0,8|; |0,55 - 0,5|; |0,425 - 0,5|\} = 0,16875 \leq \varepsilon - \text{неверно, переходим к 3 итерации.}$$

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Решение:

Дальнейшие вычисления можно проводить вручную или составить программу, выводящую результат в виде таблицы

n	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$	Δ_k

Воспользовавшись, например, Excel, получим

k	0	1	2	3	4	...	11	12
$x_1^{[k]}$	0,8	0,8	0,825	0,815	0,818125		0,8169	0,816902
$x_2^{[k]}$	0,5	0,55	0,5125	0,5125	0,507188		0,507044	0,507042
$x_3^{[k]}$	0,5	0,425	0,4375	0,421875	0,424375		0,422534	0,422536
Δ_k		0,225	0,16875	0,126563	0,094922		0,012671	0,009503
Максимум изменения		0,075	0,0375	0,015625	0,005312		0,000007	0,000002

Итак, на 12 шаге точность достигнута. Выпишем решение с верными значащими цифрами и требуемой погрешностью $x \approx (0,817; 0,507; 0,423)$.

Ответ: $(0,817; 0,507; 0,423) \pm 0,01$.

§2. Численные методы решения СЛУ

n2. Метод итераций.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\text{a) } \begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0 \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 8,7x_1 - 3,1x_2 + 1,8x_3 - 2,2x_4 = -9,7 \\ 2,1x_1 + 6,7x_2 - 2,2x_3 = 13,1 \\ 3,2x_1 - 1,8x_2 - 9,5x_3 - 1,9x_4 = 6,9 \\ 1,2x_1 + 2,8x_2 - 1,4x_3 - 9,9x_4 = 25,1 \end{cases}$$

Дополнительные задания.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\text{a) } \begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4 \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6,1x + 0,7y - 0,05z = 6,97 \\ -1,3x - 2,05y + 0,87z = 0,1 \\ 2,5x - 3,12y - 5,03z = 2,04 \end{cases}$$

Домашнее задание.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\text{a) } \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 \end{cases}$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итераций. В данном методе при вычислении $(k + 1)$ -го приближения неизвестного x_i учитываются уже найденные ранее $(k + 1)$ -е приближения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$.

$$\text{Приведём систему (1) к виду (2)} \quad \begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \dots + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}$$

Запишем систему (2) в матричной форме $\dot{x} = Cx + d$, где $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

Первое приближение $x^{[1]}$ ищется по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{[1]} = c_{11}x_1^{[0]} + c_{12}x_2^{[0]} + c_{13}x_3^{[0]} + \dots + c_{1n}x_n^{[0]} + d_1 \\ x_2^{[1]} = c_{21}x_1^{[1]} + c_{22}x_2^{[0]} + c_{23}x_3^{[0]} + \dots + c_{2n}x_n^{[0]} + d_2 \\ x_3^{[1]} = c_{31}x_1^{[1]} + c_{32}x_2^{[1]} + c_{33}x_3^{[0]} + \dots + c_{3n}x_n^{[0]} + d_3 \\ \vdots \\ x_n^{[1]} = c_{n1}x_1^{[1]} + c_{n2}x_2^{[1]} + c_{n3}x_3^{[1]} + \dots + c_{nn}x_n^{[0]} + d_n \end{cases}$$

Аналогично строятся вторая, третья и т.д. итерации.

Рекуррентная формула метода Зейделя имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{[k+1]} = c_{11}x_1^{[k]} + c_{12}x_2^{[k]} + c_{13}x_3^{[k]} + \dots + c_{1n}x_n^{[k]} + d_1 \\ x_2^{[k+1]} = c_{21}x_1^{[k+1]} + c_{22}x_2^{[k]} + c_{23}x_3^{[k]} + \dots + c_{2n}x_n^{[k]} + d_2 \\ x_3^{[k+1]} = c_{31}x_1^{[k+1]} + c_{32}x_2^{[k+1]} + c_{33}x_3^{[k]} + \dots + c_{3n}x_n^{[k]} + d_3 \\ \vdots \\ x_n^{[k+1]} = c_{n1}x_1^{[k+1]} + c_{n2}x_2^{[k+1]} + c_{n3}x_3^{[k+1]} + \dots + c_{nn}x_n^{[k]} + d_n \end{cases}$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1^{[k+1]} = c_{11}x_1^{[k]} + c_{12}x_2^{[k]} + c_{13}x_3^{[k]} + \dots + c_{1n}x_n^{[k]} + d_1 \\ x_2^{[k+1]} = c_{21}x_1^{[k+1]} + c_{22}x_2^{[k]} + c_{23}x_3^{[k]} + \dots + c_{2n}x_n^{[k]} + d_2 \\ x_3^{[k+1]} = c_{31}x_1^{[k+1]} + c_{32}x_2^{[k+1]} + c_{33}x_3^{[k]} + \dots + c_{3n}x_n^{[k]} + d_3 \\ \vdots \\ x_n^{[k+1]} = c_{n1}x_1^{[k+1]} + c_{n2}x_2^{[k+1]} + c_{n3}x_3^{[k+1]} + \dots + c_{nn}x_n^{[k]} + d_n \end{array} \right.$$

Достаточное условие сходимости метода Зейделя полностью совпадает с достаточным условием сходимости метода итераций:

Теорема. Если матрица C коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2) удовлетворяет условию

$$q = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1,$$

то система (2) имеет единственное решение x и построенная последовательность сходится к точному решению при любом начальном приближении $x^{[0]}$, причем имеет место оценка погрешности:

$$\Delta_k = \frac{q^k}{1 - q} \max_{i=1,n} |x_i^{[1]} - x_i^{[0]}| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя.

Пример. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Система была приведена к итерационному виду в методе итераций:

$$\begin{cases} x_1 = 0,2x_2 - 0,2x_3 + 0,8 \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,5 \\ x_3 = -0,25x_1 + 0,25x_2 + 0,5 \end{cases}$$

Вычислим $q = \max\{0,4; 0,75; 0,5\} = 0,75 < 1$ - условия метода выполнено, последовательность будет сходится к точному решению при любом выборе начального

приближения $x^{[0]}$. Пусть $x^{[0]} = d = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Решение:

Итак, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & -0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,5 \\ -0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Пусть $x^{[0]} = d$.

1 итерация

$$x_1^{[1]} = 0,2x_2^{[0]} - 0,2x_3^{[0]} + 0,8 = 0,2 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 = 0,8$$

$$x_2^{[1]} = -0,25x_1^{[1]} + 0,5x_3^{[0]} + 0,5 = -0,25 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 = 0,55$$

$$x_3^{[1]} = -0,25x_1^{[1]} + 0,25x_2^{[1]} + 0,5 = -0,25 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,55 + 0,5 = 0,4375$$

$$\Delta_1 = \frac{q^1}{1 - q} \max_{i=1,n} |x_i^{[1]} - x_i^{[0]}| = \frac{0,75^1}{1 - 0,75} \max\{|0,8 - 0,8|; |0,55 - 0,5|; |0,4375 - 0,5|\} =$$

$= 0,1875 \leq 0,01$ – неверно, переходим ко 2 итерации.

2 итерация

$$x_1^{[2]} = 0,2x_2^{[1]} - 0,2x_3^{[1]} + 0,8 = 0,2 \cdot 0,55 - 0,2 \cdot 0,4375 + 0,8 = 0,8225$$

$$x_2^{[2]} = -0,25x_1^{[2]} + 0,5x_3^{[1]} + 0,5 = -0,25 \cdot 0,8225 + 0,5 \cdot 0,4375 + 0,5 = 0,513125$$

$$x_3^{[2]} = -0,25x_1^{[2]} + 0,25x_2^{[2]} + 0,5 = -0,25 \cdot 0,8225 + 0,25 \cdot 0,513125 + 0,5 = 0,422656$$

$$\Delta_2 = \frac{q^2}{1 - q} \max_{i=1,n} |x_i^{[2]} - x_i^{[1]}| = \frac{0,75^2}{1 - 0,75} \cdot 0,0625 = 0,140625 \leq 0,01$$
 – неверно, переходим к

3 итерации.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Решение:

Дальнейшие вычисления можно проводить вручную или составить программу, выводящую результат в виде таблицы

n	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$	Δ_k

Воспользовавшись, например, Excel, получим

k	0	1	2	3	4	...	11	12
$x_1^{[k]}$	0,8	0,8	0,8225	0,818094	0,816925	...	0,816901	0,816901
$x_2^{[k]}$	0,5	0,55	0,513125	0,506805	0,506858	...	0,507042	0,507042
$x_3^{[k]}$	0,5	0,4375	0,422656	0,422178	0,422483	...	0,422535	0,422535
Δ_k		0,1875	0,140625	0,105469	0,079102	...	0,010559	0,007919
Максимуму отклонения		0,0625	0,036875	0,00632	0,001168	...	0	0

Итак, на 12 шаге точность достигнута. Выпишем решение с верными значащими цифрами и требуемой погрешностью $x \approx (0,817; 0,507; 0,423) \pm 0,01$.

Ответ: $(0,817; 0,507; 0,423) \pm 0,01$.

§2. Численные методы решения СЛУ

п3. Метод Зейделя

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,01$.

$$\text{а) } \begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0 \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 8,7x_1 - 3,1x_2 + 1,8x_3 - 2,2x_4 = -9,7 \\ 2,1x_1 + 6,7x_2 - 2,2x_3 = 13,1 \\ 3,2x_1 - 1,8x_2 - 9,5x_3 - 1,9x_4 = 6,9 \\ 1,2x_1 + 2,8x_2 - 1,4x_3 - 9,9x_4 = 25,1 \end{cases}$$

Дополнительные задания.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\text{а) } \begin{cases} 0,9x_1 + 2,7x_2 - 3,8x_3 = 2,4 \\ 2,5x_1 + 5,8x_2 - 0,5x_3 = 3,5, \\ 4,5x_1 - 2,1x_2 + 3,2x_3 = -1,2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6,1x + 0,7y - 0,05z = 6,97 \\ -1,3x - 2,05y + 0,87z = 0,1 \\ 2,5x - 3,12y - 5,03z = 2,04 \end{cases}$$

Домашнее задание.

Задание. Найдите приближенное решение системы линейных уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,01$

$$\text{а) } \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 \\ -1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = -1,4 \end{cases}$$

§2. Численные методы решения СЛУ

Выводы

Метод итерации и метод Зейделя решения систем линейных уравнений являются самостоятельными сами по себе. У каждого из методов есть свои минусы и свои плюсы, которые ярко выражаются лишь на конкретных примерах.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 0,5x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \text{ точность } \varepsilon = 0,01 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Метод итераций: 12 итераций, $(0,817; 0,507; 0,423) \pm 0,01$.

Метод Зейделя: 12 итераций, $(0,817; 0,507; 0,423) \pm 0,01$.

$$\text{б) } \begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0 \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2, \text{ точность } \varepsilon = 0,01 \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3 \end{cases}$$

Метод итераций: 4 итераций, $(0,140; 0,529; -0,227) \pm 0,01$.

Метод Зейделя: 6 итераций, $(0,140; 0,529; -0,227) \pm 0,006$.

$$\text{в) } \begin{cases} 8,7x_1 - 3,1x_2 + 1,8x_3 - 2,2x_4 = -9,7 \\ 2,1x_1 + 6,7x_2 - 2,2x_3 = 13,1 \\ 3,2x_1 - 1,8x_2 - 9,5x_3 - 1,9x_4 = 6,9, \text{ точность } \varepsilon = 0,01 \\ 1,2x_1 + 2,8x_2 - 1,4x_3 - 9,9x_4 = 25,1 \end{cases}$$

Метод итераций: 33 (16) итерации, $(-0,746; 1,880; -0,942; -1,961) \pm 0,01$.

Метод Зейделя: 34 (11) итерации, $(-0,746; 1,880; -0,942; -1,961) \pm 0,01$.