Встретились 6 друзей и каждый пожал руку каждому своему другу. Сколько было рукопожатий?

*

Расчет количества вариантов: формулы перемножения и сложения количества вариантов.

Количество текстов данной длины в данном алфавите.

Актуализация знаний

- В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач, а раздел математики, в котором рассматриваются подобные задачи, называют комбинаторикой.

Историческая справка

- С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности.
- В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов.
- В Древней Греции изучали фигуры, которые можно составить из частей квадрата.
- Комбинаторика становится наукой в семнадцатом веке.
- Изучением комбинаторных задач занимались французские математики Б. Паскаль и П.Ферма.
- Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. Лейбниц.
- Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л.Эйлеру.
- Комбинаторными задачами интересовались и математики, занимавшиеся составлением и разгадыванием шифров, изучением древних письменностей.

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач на перебор различных вариантов, удовлетворяющих каким-либо условиям.

Здесь изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

- Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова combinare, которое означает «соединять, сочетать».
- Методы комбинаторики находят широкое применение в физике, химии, биологии, экономике и других областях знаний.

Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

В Древней Греции

подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей и т.д.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т. д.)

В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучал, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1.07.1646 - 14.11.1716)

Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Леонард Эйлер(1707-1783)

рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов, положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку—топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур.

Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. Сочинение Я. Бернулли превзошло работы его предшественников и современников систематичностью, простотой методов, строгостью изложения и в течение XVIII века пользовалось известностью не только как серьёзного научного трактата, но и как учебно-справочного издания.

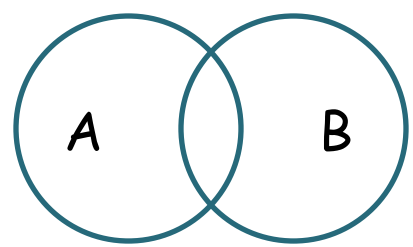
Практическая деятельность по изучению нового материала

Методы решения комбинаторных задач

1. Правило суммы.
2. Правило произведения

Правило суммы

- **Если пересечение конечных множеств A и B пусто, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B :**



$$n\left(A \quad и \quad B\right) = n(A) + n(B)$$

Задача №1.

- На одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой – 40 различных книг (не такие как на первой). Сколькими способами можно выбрать одну книгу.

Решение:

$30 + 40 = 70$

(**способами**).

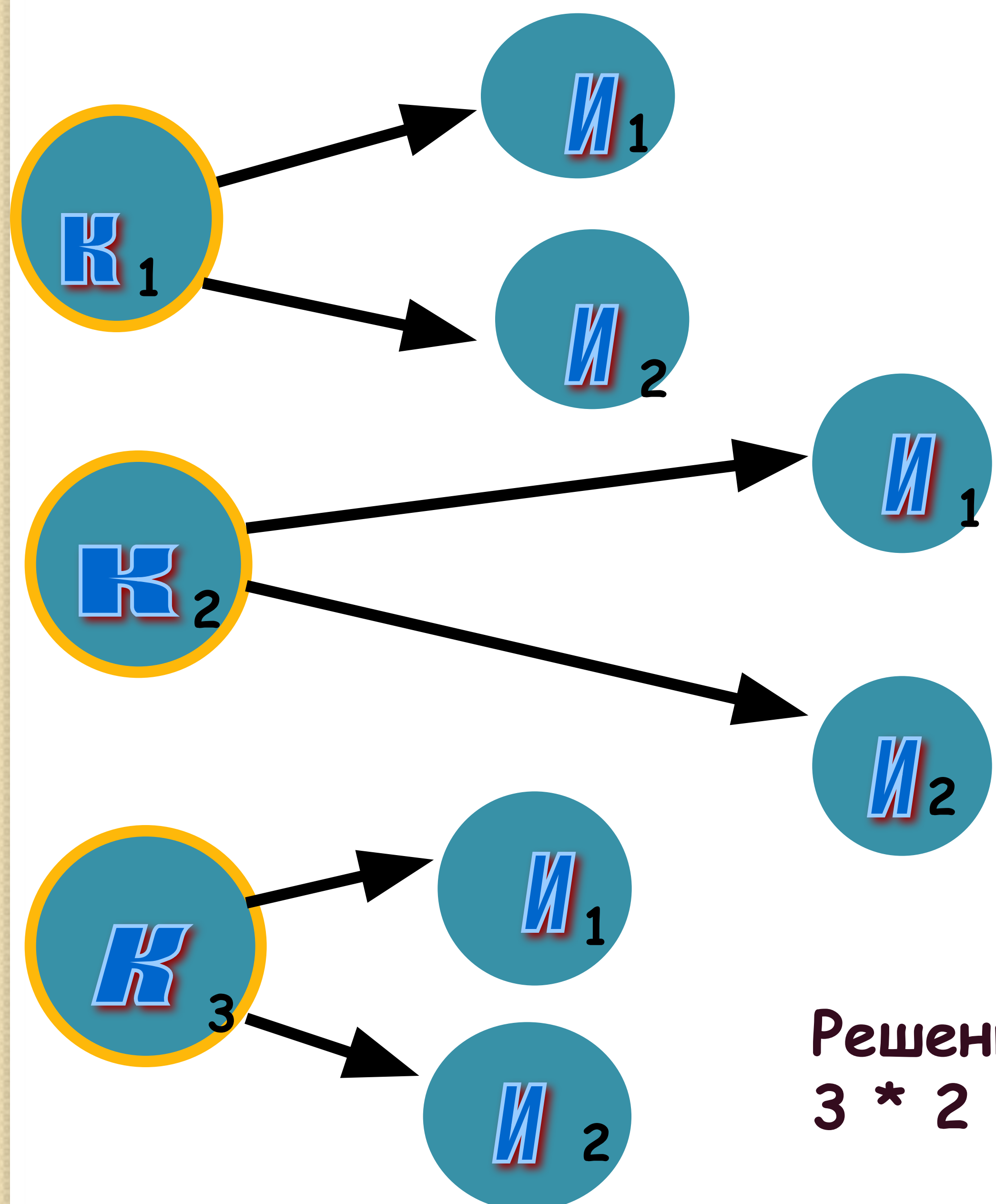
Правило умножения.

- Если множества А и В конечны, то число **N** возможных пар (а; в), где а из А, в из В равно произведению чисел элементов этих множеств:

$$N = n(A) * n(B)$$

Задача № 2

Пусть существует 3 кандидата на пост командира и 2 на пост инженера. Сколькими способами можно сформировать экипаж корабля, состоящий из командира и инженера?



Решение:

3 * 2 = 6 (способ).

1.Имеется 3 вида конвертов и 4 вида марок. Сколько существует вариантов выбора конверта с маркой?12

2.В кружке 6 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту кружка и его заместителя?30

3.Концерт состоит из 5 номеров. Сколько имеется вариантов программы этого концерта?25

4. В буфете есть 4 сорта пирожков. Сколькими способами ученик может купить себе 2 пирожка?8

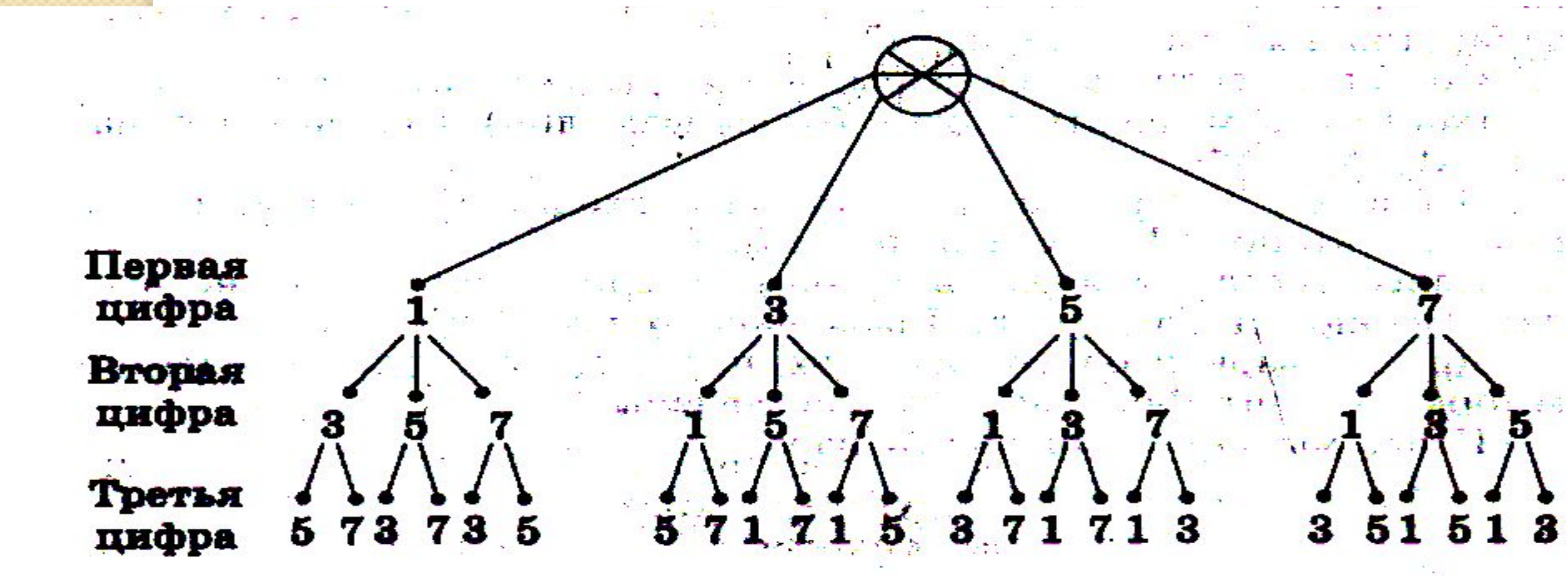
5. Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях.
Сколько существует вариантов выбора этой пары?6

Различные способы решения комбинаторных задач

1 способ

- Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Такую схему называют <u>*деревом возможных вариантов.*</u>



2 способ

- Ответить на поставленный вопрос в задаче можно не выписывая сами числа.

То есть путем рассуждения.

- Первую цифру можно выбрать четырьмя способами.
- Так как после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать тремя способами.
- Наконец, третью цифру можно выбрать(из оставшихся двух) уже двумя способами.

- Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$, т.е. 24.
- Отвечая на поставленный вопрос в задаче , мы использовали, так называемое комбинаторное правило умножения.

Комбинаторное правило умножения

- Если первый элемент можно выбрать **n1** способами, после чего второй элемент можно выбрать из оставшихся элементов **n2** способами, затем третий элемент – **n3** способами и т.д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению **n1 · n2 · n3 · …nk.**

Домашнее задание

1 вариант.

1. Сколько можно составить четырехзначных чисел из цифр 1, 5, 8, 3, если: а) цифры в числе не повторяются;

б) цифры могут повторяться.

2. В среду в 5 «Б» классе 5 уроков: русский, информатика, естествознание, ИЗО, иностранный. Сколько можно составить вариантов расписания на день? Сколько можно составить вариантов расписания на день, зная, что информатика –первый урок?

2 вариант.

1. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 4, 9, 7, если: а) цифры в числе не повторяются;

б) цифры могут повторяться.

2. В среду в 5 «А» классе 5 уроков: русский, литература, естествознание, математика, иностранный. Сколько можно составить вариантов расписания на день? Сколько можно составить вариантов расписания на день, зная, что математика – второй урок?

Задача 1.

- Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на 8 беговых дорожках?

Решение.

- Существует P8 всевозможных перестановок из 8 элементов, т.е.
- $P8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ (способов)
- Ответ: 40 320 способов.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

В комбинаторике факториал натурального числа *n* интерпретируется как количество перестановок интерпретируется как количество перестановок (упорядочиваний) множества из *n* элементов. Например, для множества {*A*,*B*,*C*,*D*} из 4-х элементов существует 4! = 24 перестановки:

Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

- **№1**
- Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях.
- Сколько существует вариантов выбора этой пары?

Решение:

- Составим сначала все пары, которые входит Антонов. Получим 3 пары: АГ,АС,АФ.
- Выпишем пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: ГС,ГФ.
- Составим пары, в которые входит Сергеев, но не входят Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: СФ.
- Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров уже составлены.
- Итак, мы получили 6 пар: АГ,АС,АФ,
  ГС,ГФ,
  СФ.

- Итак, мы получили 6 пар: АГ,АС,АФ,

  ГС,ГФ,

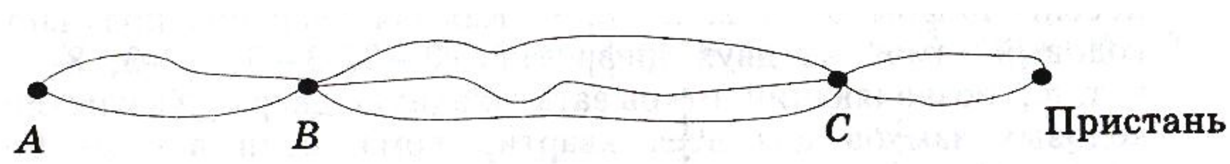
  СФ.

Значит, всего существует 6 вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

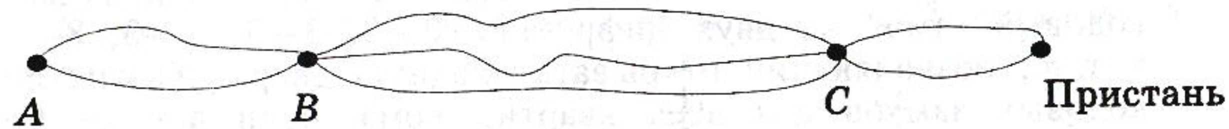
Способ рассуждений, которым мы воспользовались при решении задачи, называют *перебором возможных вариантов.*

Пример 3.

- Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги, из города С до пристани – две дороги.



Туристы хотят проехать из города *А* через города В и *С* к пристани.
 Сколькими способами они могут выбрать маршрут ?



- Решение.
- Путь из А в В туристы могут выбрать двумя способами. Далее в каждом случае они могут проехать из В в С тремя способами. Значит, имеются $2 \cdot 3$ вариантов маршрута из А в С. Так как из города С на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует

$2 \cdot 3 \cdot 2$, т.е. 12, способов

выбора туристами маршрута из города А к пристани.